Sciences & Technologie **A** – **N°33,** Juin. (2011), pp. 09-17

EQUATIONS MONODIMENSIONNELLES DU MOUVEMENT DE L'AIR AVEC LA TRANSITION DE PHASE DE L'EAU

H. BELHIRECHE, M. ZINE AISSAOUI, HISAO FUJITA YASHIMA

Université 08 mai 1945, Guelma,
Algérie

Reçu le 15/12/2010 – Accepté le 21/06/2011

Résumé

Dans ce travail on considère un système d'équations modélisant le mouvement de l'atmosphère avec la transition de phase gaz-liquide de l'eau dans un domaine d'une dimension verticale et on démontre l'existence et l'unicité de la solution locale.

***Mots clés**:* Monodimensionnelles, mouvement de l'atmosphère, transition de phase gaz liquide

Abstract

In this paper we consider an equation system modelling the motion of the atmosphere with the gas-liquid phase transition of the water in a domain of one vertical dimension and we prove the existence and uniqueness of the local solution.

.

Keywords: One-dimensional, motion of the atmosphere, phase transition gas-liquid
.

ملخص

في هذا العمل ندرس نظام المعادلات المنبثقة من نمذجة حركة الغلاف الجوي وفق مرحلة الانتقال من الماء الغازي الى الماء السائل في مجال ذو بعد وحيد و عمودي حيث نبرهن على وجود حل محلي وحيد لهذه المسالة.

الكلمات المفتاحيـــة : ذات البعد الواحد ، والحركة من الغلاف الجوي ، ومرحلة انتقالية الغاز السائل

I - INTRODUCTION

Même si la description du mouvement de l'air avec la transition de phase de l'eau, donc avec d'éventuelles gouttelettes d'eau, est cruciale pour la modélisation des phénomènes atmosphériques et météorologiques, l'étude mathématique de ce phénomène est peu développée jusqu'à maintenant à cause de sa complexité. Dans [2] on a proposé un modèle mathématique pour le mouvement de l'air avec la transition de phase de l'eau et démontré un théorème d'existence et d'unicité pour un système d'équations approché de ce modèle

Le but du présent travail est de démontrer l'existence et l'unicité de la solution locale d'un système d'équations analogue à celui de [2] mais avec quelques modifications. Elles concernent la description des processus de condensation et d'évaporation de H2O (voir le paragraphe suivant) et la détermination de la vitesse des gouttelettes de masse m (voir (3.2)). A notre avis, ces modifications rendent plus cohérente la description mathématique des phénomènes. Dans le système d'équations que nous considérons, à l'exception de voisinages des extrémités du domaine, la variable spatiale x et la force extérieure f peuvent être considérées comme la position verticale et le gradient du potentiel de pesanteur Φ (multiplie par -1). Comme dans [2], ici nous considérons seulement la transition de phase de l'eau de gaz en liquide et vice versa.

2 - Description de la formation et l'évaporation des gouttelettes.

Pour décrire la formation et l'évaporation des gouttelettes, rappelons d'abord que la condensation aura lieu quand la densité de la vapeur d'eau notée $\pi(x,t)$ dans l'air dépasse la densité de la vapeur saturée notée $\bar{\pi}_s = \bar{\pi}_s(T)$, qui est fonction de la température T, et que l'évaporation de l'eau des gouttelettes aura lieu quand $\pi(x,t) < \bar{\pi}_s(T)$.

Introduisons une fonction $S_l(m)$ qui représente la surface des gouttelettes de masse m, où nous considérons m comme la somme de la masse de H2O et de celle des noyaux (dits aérosols) à l'exception des gouttelettes d'eau de diamètre trop petit. Nous supposons que

(2.1) $$S_l(m) \in C^1([0,\infty[),$$

(2.2) $$S_l(m) = 0 \quad pour \quad 0 \le m \le \frac{\bar{m}_a}{2}, \qquad S_l(m) = 3^{\frac{2}{3}}(4\pi)^{\frac{1}{3}} m^{\frac{2}{3}} \quad pour \quad m \ge \bar{m}_A$$

,

avec $0 < \bar{m}_a < \bar{m}_A < \infty$ ($\bar{m}_a$ et $\bar{m}_A$ représentent les bornes inférieure et supérieure de la masse des aérosols susceptibles de la formation de gouttelettes).

Avec $S_l(m)$ ainsi définie et avec $\pi(x,t)$ et $\bar{\pi}_s(T)$, nous introduisons la quantité de condensation sur les gouttelettes de masse m (par unité de masse)

(2.3)
$$h^0_{gl}(m) = h^0_{gl}(T,\pi,m) = K_1 \frac{S_l(m)}{m}(\pi - \bar{\pi}_s(T)),$$

où K_1 est le coefficient positif de la vitesse de condensation ou d'évaporation. On introduit également la quantité totale de condensation sur toutes les gouttelettes (2.4)

$$H^0_{gl}(T,\pi,\sigma) = K_1\big(\pi - \bar{\pi}_s(T)\big)\int_0^\infty \frac{S_l(m)}{m}\sigma(m)dm$$

,

où $\sigma(m)$ désigne la densité de H2O en l'état liquide contenue dans des gouttelettes de masse m. On a évidemment

$$h^0_{gl}(m) = \frac{m^{-1}S_l(m)}{\int_0^\infty m'^{-1}S_l(m')\sigma(m')dm'} H^0_{gl}(T,\pi,\sigma).$$

En outre, on introduit la probabilité avec laquelle une gouttelette de masse m apparaît avec le début de condensation et celle avec laquelle une gouttelette de masse m disparaît suite à l'achèvement de l'évaporation. On définit la probabilité de la formation de nouvelles gouttelettes de masse m donnée par

(2.5) $$g_0(m)[N^* - \tilde{N}(\sigma)]^+[\pi - \bar{\pi}_s(T)]^+,$$

où N^* est le nombre total de gouttelettes qui peuvent être formées dans l'unité de volume tandis que $\tilde{N}(\sigma)$ représente le nombre dans l'unité de volume des aérosols qui se trouvent déjà dans des gouttelettes et est donné par

$$\tilde{N}(\sigma) = \int_0^\infty \frac{\sigma(m)}{m}dm + C_l\int_0^\infty \sigma(m)dm.$$

De manière analogue on définit la probabilité de disparition des gouttelettes

(2.6) $$g_1(m)[\pi - \bar{\pi}_s(T)]^-.$$

Comme au moment du début de la condensation ou de l'achèvement de l'évaporation la masse de la gouttelette m est celle du noyau (aérosol) qui ne s'annule pas, on suppose que

(2.7)
$$g_0(\cdot),\ g_1(\cdot) \in C^1([0,\infty[), \quad supp\, g_0(\cdot) \subset [\bar{m}_a,\bar{m}_A], \quad supp\, g_1(\cdot) \subset [0,\bar{m}_A].$$

Pour les aspects physiques sur lesquels cette modélisation est basée, voir [3], [5], [6] etc.

3 - Système d'équations.

Les quantités physiques que nous devons considérer sont la densité de l'air sec ϱ, la densité de la vapeur π, la densité de l'eau liquide $\sigma(m)$, la vitesse de l'air v, la vitesse des gouttelettes $u(m)$, la température T et la pression p. On suppose que la pression est déterminée par l'équation

(3.1) $$p = R\left(\frac{\varrho}{\mu_a} + \frac{\pi}{\mu_h}\right)T,$$

où R, μ_a et μ_h sont respectivement la constante universelle des gaz, la masse molaire moyenne de l'air et la masse molaire de l'eau. D'autre part, supposons que la vitesse $u(m)$ des gouttelettes de masse m est donnée par

(3.2) $u(m,x,t) = v(x,t) - \frac{1}{\alpha_l(m)} f,$

où $v(x,t)$ est la vitesse de l'air, $\alpha_l(m)$ le coefficient de frottement entre les gouttelettes et l'air et $f = \frac{d\Phi}{dx}$ la force extérieure donnée par le gradient d'un potentiel $\Phi(x)$. On suppose que $\alpha_l(\cdot) \in C^1([0,\infty[)$, $\alpha_l(m) > 0 \ \forall m \in [0,\infty[$.

Nous allons considérer le système d'équations dans le domaine en une dimension $I =]0,1[$, aux extrémités duquel nous posons les conditions aux limites homogènes pour v et les conditions non-homogènes $T(0,t) = a_T$, $T(1,t) = b_T$ pour T. Il nous est commode de considérer, au lieu de T, la fonction inconnue ϑ définie par

(3.3) $T = T_0 + \vartheta, \quad T_0(x) = (1-x)a_T + xb_T.$

Dans la suite toutefois nous continuons à utiliser T dans l'expression de $\bar{\pi}_s(T)$ et les expressions qui le contiennent, mais dans les calculs nous devons traiter ϑ, en rappelant (3.3).

D'autre part pour les difficultés techniques pour le moment insurmontables, dans les expressions concernant la condensation et l'évaporation, au lieu de $h_{gl}^0(T,\pi,m)$ et $H_{gl}^0(T,\pi,\sigma)$ définis dans (2.3) et (2.4), nous allons considérer

(3.4) $h_{gl}(T,\pi,m) = K_1 \frac{S_l(m)}{m} (\Theta_\delta(\pi) - \bar{\pi}_s(T)),$

(3.5)
$$H_{gl}(T,\pi,\sigma) = K_1(\Theta_\delta(\pi) - \bar{\pi}_s(T)) \int_0^\infty \frac{S_l(m)}{m} \sigma(m) dm,$$

où $\Theta_\delta(\pi)$ est la moyenne locale de $\pi(x)$ avec une fonction de poids convenable, par exemple

(3.6) $$\Theta_\delta(\pi) = \frac{\int_0^1 \pi(y) e^{-(\frac{x-y}{\delta})^2} dy}{\int_0^1 e^{-(\frac{x-y}{\delta})^2} dy}, \quad \delta \neq 0.$$

Nous allons envisager dans le domaine $I =]0,1[$ et pour $t \geq 0$ le système d'équations pour les inconnues v, ϑ, ϱ, π et $\sigma(m)$

(3.7)
$$(\varrho + \pi)(\partial_t v + v\partial_x v) = \eta \partial_x^2 v - R\partial_x \left[\left(\frac{\varrho}{\mu_a} + \frac{\pi}{\mu_h} \right)(\vartheta + T_0) \right] - \left(\varrho + \pi + \int_0^\infty \sigma(m)dm \right) f$$
,

(3.8)
$$(\varrho + \pi)c_v(\partial_t \vartheta + v\partial_x \vartheta) + R\left(\frac{\varrho}{\mu_a} + \frac{\pi}{\mu_h} \right)(\vartheta + T_0)\partial_x v =$$
$$= \kappa \partial_x^2 \vartheta + \eta(\partial_x v)^2 + E_{rad} + L_{gl} H_{gl} - (\varrho + \pi)c_v v \partial_x T_0 \,,$$

(3. 9) $\partial_t \varrho + \partial_x(\varrho v) = 0\,,$

(3.10) $\partial_t \pi + \partial_x(\pi v) = -H_{gl}(T,\pi,\sigma),$

(3.11)
$$\partial_t \sigma(m) + \partial_x\big(\sigma(m)u(m)\big) + \partial_m\Big(m\, h_{gl}(T,\pi,m)\sigma(m)\Big) = -h_{gl}(T,\pi,m)\sigma(m) +$$
$$+\frac{m}{2}\int_0^m \beta(m-m',m')\,\sigma(m')\sigma(m-m')dm' - m\int_0^\infty \beta(m,m')\,\sigma(m)\sigma(m')dm' +$$
$$+g_0(m)\big[N^* - \tilde{N}(\sigma)\big]^+ [\,\Theta_\delta(\pi) - \bar{\pi}_s(\bar{T})]^+ - g_1(m)\,[\,\Theta_\delta(\bar{\pi}) - \bar{\pi}_s(\bar{T})]^- \sigma(m),$$

où η est le coefficient de viscosité, c_v la chaleur spécifique de l'air, κ le coefficient de thermoconductibilité, L_{gl} la chaleur latente, E_{rad} la source de chaleur (comme celle due a la radiation) et $\beta(m,m')$ la probabilité de rencontre entre une gouttelettes de masse m et une de masse m'; η, c_v, κ et L_{gl} sont considérés comme constantes strictement positives. Les équations (3.7)-(3.9) sont formulées sur la base de la mécanique des fluides classique (voir par exemple [4]), tandis que les équations (3.10)-(3.11) résultent des considérations du paragraphe précédent (voir aussi [2]).

Le système d'équations (3.7)-(3.11) doit être considéré avec les conditions aux limites

(3.12) $v = 0, \ \vartheta = 0$ pour $x = 0$ et $x = 1$.

4 - Résultat principal.

Pour construire la solution des équations (3.7)-(3.11), au moins dans un intervalle de temps suffisamment petit, considérons les données initiales

(4.1) $v(0,\cdot) = v_0(\cdot) \in H_0^1(I),$

(4.2) $\vartheta(0,\cdot) = \vartheta_0(\cdot) \in H_0^1(I),$

(4.3) $\varrho(0,\cdot) = \varrho_0(\cdot) \in H^1(I), \quad inf_{x\in I} \varrho_0(x) > 0$

(4.4) $\pi(.,0) = \pi_0(.) \in H^1(I), \quad inf_{x\in I} \pi_0(x) > 0,$

(4.5) $\sigma(.,.0) = \sigma_0(.,.) \in H^1(D_2), \quad \sigma_0(x) \geq 0, \quad supp\, \sigma_0 \subset [\bar{m}_a, \bar{M}_1] \times [0,1],$

Où

$D_2 = \mathbb{R}_+ \times I$ et $0 < \bar{M}_1 < \infty$. Nous supposons que

(4.6) $f \in H^2(I), \ f(0) = f(1) = 0,$

(4.7) $E_{rad} \in L_{loc}^\infty(0,\infty, L^2(I)),$

(4.8) $\beta(.,.) \in C^1((R_+)^2), \quad \beta(m,m') = 0$

si $m + m' \geq \bar{M}_2 \ (0 < \bar{M}_2 \ < \infty)$.

La condition (4.8) est motivée non seulement par des raisons techniques, mais aussi par le phénomène d'éclatement des grosses gouttelettes suite à la friction avec l'air. On a :

Théorème A

Il existe un $\bar{t} > 0$ tel que dans l'intervalle $[0,\bar{t}]$ le système d'équations (3.7)-(3.11) avec les conditions aux limites (3.12) et les conditions initiales (4.1)-(4.5) admette une solution $(v, \vartheta, \varrho, \pi, \sigma)$ et une seule dans la classe

$$v, \vartheta \in L^\infty(0,\bar{t}; H_0^1(I)) \cap L^2(0,\bar{t}; H^2(I)),$$
$$\varrho \epsilon\, C([0,\bar{t}]; H^1(I)), \quad inf_{(x,t)\in I\times[0,\bar{t}]}\, \varrho(x,t) > 0,$$
$$\pi \epsilon\, C([0,\bar{t}]; H^1(I)), \quad inf_{(x,t)\in I\times[0,\bar{t}]}\, \pi(x,t) > 0,$$
$$\sigma \epsilon\, C([0,t_1]; H^1(D_2)), \quad \sigma \geq 0.$$

5 - Equations linéarisées pour les densités.

Pour démontrer le théorème A, on commence par la résolution des équations de continuité de l'air sec, de la vapeur d'eau et des gouttelettes de masse m avec $v = \bar{v}$, $\vartheta = \bar{\vartheta}$ données. On considère d'abord l'équation linéaires en ϱ, π et σ

(5.1) $$\partial_t \varrho + \partial_x(\varrho \bar{v}) = 0,$$

(5.2) $$\partial_t \pi + \partial_x(\pi \bar{v}) = -H_{gl}(\bar{T}, \bar{\pi}, \bar{\sigma}),$$

(5.3)
$$\partial_t \sigma(m) + \partial_x\big(\sigma(m)\bar{u}(m)\big) + \partial_m\Big(m\, h_{gl}(\bar{T},\bar{\pi},m)\sigma(m)\Big) = -h_{gl}(\bar{T},\bar{\pi},m)\sigma(m) +$$
$$+\frac{m}{2}\int_0^m \beta(m-m',m')\,\bar{\sigma}(m')\bar{\sigma}(m-m')dm' - m\int_0^\infty \beta(m,m')\,\bar{\sigma}(m)\bar{\sigma}(m')dm' +$$
$$+g_0(m)\big[N^* - \tilde{N}(\bar{\sigma})\big]^+\,[\Theta_\delta(\bar{\pi}) - \bar{\pi}_s(\bar{T})]^+ - g_1(m)\bar{\sigma}(m)\,[\Theta_\delta(\bar{\pi}) - \bar{\pi}_s(\bar{T})]^-,$$

où $\bar{u} = \bar{v} - \frac{1}{\alpha_l} f$, $\bar{T} = T_0 + \bar{\vartheta}$ e t $\bar{v}$, $\bar{\vartheta}$, $\bar{\varrho}$, $\bar{\pi}$ et $\bar{\sigma}$ sont des fonctions données dans $I \times [0,t_1]$ $(t_1 > 0)$ satisfaisant aux conditions initiales (4.1)-(4.5) et telles que

(5.4) $$\bar{v} \in L^\infty(0,t_1; H_0^1(I)) \cap L^2(0,t_1; H^2(I)),$$

(5.5) $$\bar{\vartheta} \in L^\infty(0,t_1; H_0^1(I)) \cap L^2(0,t_1; H^2(I)),$$

(5.6)
$$\bar{\varrho} \epsilon\, C([0,t_1]; H^1(I)), \qquad inf_{(x,t)\in I\times[0,t_1]}\, \bar{\varrho}(x,t) > 0,$$

(5.7) $$\bar{\pi} \epsilon\, C([0,t_1]; H^1(I)),$$

(5.8) $$\bar{\sigma} \epsilon\, C([0,t_1]; H^1(D_2)).$$

Pour (5.1) on a le lemme suivant. Ici et dans la suite on désigne par C une constante qui ne dépend pas de la solution mais qui peut être différente d'une formule à l'autre.

Lemme 5.1

L'équation (5.1) avec la condition (4.3) admet une solution et une seule dans la classe $\varrho \epsilon\, C^0([0,t_1]; H^1(I))$.

En outre on a

(5.9) $0 < \alpha_\varrho(t) \leq \varrho(x,t) \leq \beta_\varrho(t) < \infty$, dans $[0,1] \times [0,t_1]$,

(5.10)
$\| \varrho(.,t) \|^2_{H^1(I)} \leq \| \varrho_0 \|^2_{H^1(I)} \exp\big(Ct^{1/2} \| \bar{v} \|_{L^2(0,t;H^2(I))}\big)$ *pour* $0 \leq t \leq t_1$,

où

$$\alpha_\varrho(t) = \inf_{x\epsilon I} \varrho_0(x) \exp\Big(-\int_0^t \| \partial_x \bar{v} \|_{L^\infty(I)}\, dt'\Big),$$

$$\beta_\varrho(t) = \sup_{x\epsilon I} \varrho_0(x) \exp\left(\int_0^t \| \partial_x \bar{v} \|_{L^\infty(I)}\, dt'\right)$$

Démonstration du lemme 5.1

On le démontre de manière analogue aux travaux précédents (voir [1], [2], etc...). Plus précisément, à l'aide de la méthode des caractéristiques on démontre l'existence et l'estimation (5.9). D'autre part, pour obtenir (5.10), il suffit de multiplier (5.1) par ϱ ainsi que la dérivée par rapport à x de (5.1) par $\partial_x \varrho$ et de les intégrer sur I, en utilisant les relations

$$\int_0^1 \varrho\,(\partial_x \varrho)\bar{v}dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 \varrho^2 \partial_x \bar{v}dx, \qquad \int_0^1 \partial_x \varrho\, \partial_x^2 \varrho \bar{v}dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 (\partial_x \varrho)^2 \partial_x \bar{v}dx$$

(pour les détails, voir les travaux cités ci-dessus).

Lemme 5.2

L'équation (5.2) avec la condition initiale (4.4) admet une solution π et une seule dans la classe $\bar{\varrho} \epsilon\, C([0,t_1]; H^1(I))$ et on a

(5.11)
$$\| \pi(.,t) \|^2_{H^1(I)} \leq \| \pi_0 \|^2_{H^1(I)} \exp\int_0^t (C \| \bar{v} \|_{H^2(I)} + 1)dt' +$$
$$+\int_0^t \| H_{gl} \|^2_{H^1(I)} \exp\Big(\int_{t'}^t (C \| \bar{v} \|_{H^2(I)} + 1)dt''\Big)\, dt'$$

Démonstration du lemme 5.2

On le démontre de manière analogue au lemme 5.1.

Lemme 5.3

L'équation (5.3) avec la condition initiale (4.5) admet une solution σ et une seule dans la classe $\sigma \epsilon\ C\left([0,t_1];H^1(D_2)\right)$ et on a

(5.12) $+\int_0^t C\, f_1(t')(\| \bar{\sigma} \|^2{}_{H^1(D_2)} + 1) \exp\left(\int_0^t C\, f_1(t'')dt''\right) dt'$,

où

$f_1(t) = \| \bar{v} \|_{H^2(I)} + \| \bar{\vartheta} \|_{H^2(I)} + \| \bar{\pi} \|_{H^1(I)} + \| \bar{\sigma} \|_{H^1(D_2)} + 1$;*e n outre i l existe une constante $\bar{M} > \max(\bar{M}_1, \bar{M}_2)$ telle que*

(5.13) $\quad supp\ \sigma(.,.,t) \subset \left[\frac{m_a}{2}, \bar{M}\right[\times]0,1[\quad \forall t \in [0,t_1].$

Démonstration du lemme 5.3

Définissons d'abord pour l'équation (5.3) les caractéristique $(m(t),x(t))_{t\in[0,t_1]}$ dans $]0,\infty[\times]0,1[$ par le problème de Cauchy

(5.14) $\quad \frac{dm(t)}{dt} = m(t)\ h_{gl}(\bar{T},\bar{\pi},m(t)), \quad m(0) = m_0 \in]0,\infty[$

(5.15) $\quad \frac{dx(t)}{dt} = \bar{u}(m(t),x(t),t), \quad x(0) = x_0 \in]0,1[.$

Alors, en posant

$\bar{u}_2 = (mh_{gl}, \bar{u}), \quad \nabla_{(m,x)} = (\partial_m, \partial_x)^T,$

on peut écrire le premier membre de l'équation (5.3) dans la forme

$$\partial_t \sigma + \nabla_{(m,x)}.(\sigma \bar{u}_2) = -\frac{d}{dt}\sigma + \sigma \nabla_{(m,x)}.\bar{u}_2\ ,$$

ce qui nous permet d'utiliser la méthode des caractéristiques pour obtenir la solution

$\sigma(m(t),x(t),t)$ le long les caractéristiques $(m(t),x(t))_{t\in[0,t_1]}$, d'où l'existence de la solution;

en outre d'après les conditions (2.2), (3.4), (4.5), (4.8) et (5.14) il existe une constante $\bar{M} > \max(\bar{M}_1, \bar{M}_2)$ satisfaisant à (5.13).

Pour démontrer (5.12), on multiplie d'abord l'équation (5.3) par $\sigma(m)$ et on l'intègre sur $D'_2 =]0,\bar{M}[\times]0,1[$. En utilisant la relation

$$\int_{D'_2} \sigma\,(\bar{u}\partial_x\sigma + m\, h_{gl}\, \partial_m\sigma)dxdm = -\frac{1}{2}\int_{D'_2} \sigma^2(m)(\partial_x\bar{u}(m) + \partial_m(m\, h_{gl}))dxdm,$$

et en majorant les autres termes de manière habituelle, compte tenu de la définition de h_{gl} et de $\Theta_\delta(\pi)$ on déduit que

(5.16)

$$\frac{d}{dt}\| \sigma \|^2_{L^2(D'_2)} \leq C(\| \partial_x\bar{v} \|_{L^\infty(I)} + \| \bar{\pi} \|_{L^\infty(I)} + \| \bar{\vartheta} \|_{L^\infty(I)} + 1)\, \| \sigma \|^2_{L^2(D'_2)} +$$
$$+C\left(\| \bar{\pi} \|_{L^\infty(I)} + \| \bar{\vartheta} \|_{L^\infty(I)} + \| \bar{\sigma} \|_{L^\infty(D'_2)} + 1\right)\left(\| \bar{\sigma} \|_{L^2(D'_2)} + 1\right) \| \sigma \|_{L^2(D'_2)}.$$

D'autre part, en appliquant l'opérateur ∂_x à l'équation (5.3) et en multipliant par $\partial_x\sigma$ l'équation obtenue, on l'intègre sur D'_2 de sorte que l ' o n obtient

(5.17) $$\frac{1}{2}\int_{D'_2} \partial_t(\partial_x\sigma)^2 dxdm = -\frac{3}{2}\int_{D'_2}(\partial_x\sigma)^2\ \partial_x\bar{u}dxdm - \int_{D'_2} \sigma\ \partial_x\sigma(m)\partial_x^2\ \bar{u}dxdm$$
$$-\int_{D'_2} \sigma\ \partial_x\sigma(m)\ \partial_x\,\partial_m(m\, h_{gl})dxdm - \int_{D'_2}(\partial_x\sigma)^2\ \partial_m(m\, h_{gl})dxdm +$$
$$-\int_{D'_2} \partial_x\sigma\, \partial_m\sigma\partial_x(mh_{gl})dxdm - \int_{D'_2} \partial_x\sigma\, \partial_x\partial_m\sigma(mh_{gl})dxdm + \int_{D'_2} \partial_x\sigma\, \partial_x(h_{gl}\sigma)dxdm +$$
$$+\frac{1}{2}\int_{D'_2} m\int_0^m \beta(m-m',m')\partial_x\sigma(m)\partial_x(\bar{\sigma}(m')\bar{\sigma}(m-m'))dm'dxdm +$$
$$-\int_{D'_2} m\int_0^{\bar{M}} \beta(m,m')\partial_x\sigma(m)\partial_x\left(\bar{\sigma}(m)\bar{\sigma}(m')\right)dm'dxdm +$$
$$+\int_{D'_2} g_0\partial_x\sigma\partial_x([\Theta_\delta(\bar{\pi}) - \bar{\pi}_s(\bar{T})]^+[N^* - \tilde{N}(\bar{\sigma})]^+)dxdm +$$
$$-\int_{D'_2} g_1\partial_x\sigma\partial_x(\bar{\sigma}[\Theta_\delta(\bar{\pi}) - \bar{\pi}_s(\bar{T})]^-)dxdm$$

Pour obtenir de (5.17) une estimation de σ, nous avons besoin d'estimations adéquates

de $\sigma\ \partial_x\sigma\partial_x^2\bar{u}$ et $\sigma\partial_x\sigma\partial_x\partial_m(mh_{gl})$. Pour cela, nous rappelons d'abord le lemme suivant.

Lemme 5.4

Soit $\sigma \epsilon\ H^1(D'_2)$. On a alors

(5.18) $\quad \sup_{0<m<\bar{M}} \left|\int_0^1 \sigma(m,x)dx\right| \leq C\ \| \sigma \|_{H^1(D'_2)}$

Démonstration du lemme 5.4

I l suffit de remarquer que

$$\sup_{0<m<\bar{M}} \int_0^1 \sigma(m,x)dx \leq \frac{1}{|D'_2|}\left|\int_{D'_2} \sigma(m,x)dxdm\right| + \sup_{0<m<\bar{M}}\left|\int_{m_0}^m \partial_{m'}\int_0^1 \sigma(m',x)dxdm'\right|,$$

où m_0 est un point de l'intervalle $[0,\bar{M}]$ tel que

$$\int_0^1 \sigma(m_0,x)dx = \frac{1}{|D'_2|}\int_{D'_2} \sigma(m,x)dxdm,$$

d'où par des calculs élémentaires on déduit (5.18).

Cela étant, on a le

Lemme 5.5

Soient $\sigma \epsilon\ H^1(D'_2)$, $v \epsilon\ H^2(I)$, $u = v - \frac{1}{\alpha_l(m)}f$

$h_{gl}(m)$ la fonction définie dans (3.4),

$\pi\ \epsilon\ H^1(I)$ et $T \epsilon\ H^2(I)$. Alors on a

(5.19)

$$\left|\int_{D'_2} \sigma\ (\partial_x\sigma)\partial_x^2\ udxdm\right| \leq C\ \| \sigma \|^2{}_{H^1(D'_2)}\left(\| v \|_{H^2(I)} + \| f \|_{H^2(I)}\right),$$

(5.20)

$$\left|\int_{D'_2} \sigma(\partial_x\sigma)\,\partial_x\partial_m(mh_{gl})(m)dxdm\right| \leq C\left(\| \pi \|_{H^1(I)} + \| T \|_{H^2(I)}\right) \| \sigma \|^2{}_{H^1(D'_2)}.$$

Démonstration du lemme 5.5

Comme

$\partial_x^2 u = \partial_x^2 v - \frac{1}{\alpha_l(m)}\partial_x^2 f,$

on a

(5.21)
$$\left|\int_{D'_2}\sigma\,(\partial_x\sigma)\partial_x^2\,u dx dm\right| \le \int_0^{\bar{M}} \|\,\sigma(.,m)\,\|_{L^\infty(I)} \int_0^1|\partial_x\sigma|\,(|\partial_x^2 v| + C|\partial_x^2 f|)dxdm.$$

D'autre part, on a

$$\|\,\sigma(m,.)\,\|_{L^\infty(I)} \le \left|\int_0^1\sigma(m,x)dx\right| + \int_0^1|\partial_x\sigma(m,x)|\,dx,$$

$$\int_0^1|\partial_x\sigma|\,(|\partial_x^2 v| + C|\partial_x^2 f|)dx \le \left(\|\,\partial_x^2 v\,\|_{L^2(I)} + C\,\|\,\partial_x^2 f\,\|_{L^2(I)}\right)\left(\int_0^1|\partial_x\sigma(m,x)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

En substituant ces inégalités dans (5.21) et compte tenu du lemme 5.4, on obtient

(5.22)
$$\left|\int_{D'_2}\sigma\,(\partial_x\sigma)\partial_x^2\,u dx dm\right| \le$$
$$\le \int_0^{\bar{M}}\left(C\,\|\,\sigma\,\|_{H^1(D'_2)} + \int_0^1|\partial_x\sigma(m,x)|\,dx\right)\left(\|\,\partial_x^2 v\,\|_{L^2(I)} + \|\,\partial_x^2 f\,\|_{L^2(I)}\right)\left(\int_0^1|\partial_x\sigma|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}dm,$$

d'où on déduit (5.19).

L'inégalité (5.20) se démontre de manière analogue.

Continuation de la démonstration du lemme 5.3.

Il n'est pas difficile d'estimer les autres termes de (5.17), en utilisant éventuellement

des variantes du lemme 5.4 et l'inégalité
$$\left[\int_0^{\bar{M}}\left(\int_0^{\bar{M}}|\partial_x\bar{\sigma}(m')||\bar{\sigma}(m-m')|dm'\right)^2 dm\right]^{1/2} \le C\left(\int_0^{\bar{M}}|\partial_x\bar{\sigma}(m')|^2dm'\right)^{1/2}\int_0^{\bar{M}}|\bar{\sigma}(m')|dm'.$$

Donc on déduit de (5.17) que

(5.23)

$$\frac{d}{dt}\|\,\partial_x\sigma\,\|_{L^2(D'_2)}^2 \le C\left(\|\,\bar{v}\,\|_{H^2(I)} + \|\,\bar{\vartheta}\,\|_{H^2(I)} + \|\,\bar{\pi}\,\|_{H^1(I)} + 1\right)\|\,\sigma\,\|_{H^1(D'_2)}^2 +$$

$$+C\left(\|\,\bar{\vartheta}\,\|_{H^2(I)} + \|\,\bar{\pi}\,\|_{H^1(I)} + \|\,\bar{\sigma}\,\|_{H^1(D'_2)} + 1\right)\left(\|\,\bar{\sigma}\,\|_{H^1(D'_2)} + 1\right)\|\,\sigma\,\|_{H^1(D'_2)}.$$

Maintenant en appliquant l'operateur ∂_m à l'équation (5.3) et en multipliant l'équation obtenue par $\partial_m\sigma$ et puis en l'intégrant sur D'_2, on obtient une égalité intégrale de manière analogue à (5.17) mais avec ∂_m au lieu de ∂_x. L'estimation des termes de cette égalité intégrale ne présente pas de difficulté particulière, de sorte qu'on peut obtenir de manière habituelle l'inégalité

(5.24)

$$\frac{d}{dt}\|\,\partial_m\sigma\,\|_{L^2(D'_2)}^2 \le C\left(\|\,\bar{v}\,\|_{H^2(I)} + \|\,\bar{\vartheta}\,\|_{H^2(I)} + \|\,\bar{\pi}\,\|_{H^1(I)} + 1\right)\|\,\sigma\,\|_{H^1(D'_2)}^2 +$$
$$+C\left(\|\,\bar{\vartheta}\,\|_{H^2(I)} + \|\,\bar{\pi}\,\|_{H^1(I)} + \|\,\bar{\sigma}\,\|_{H^1(D'_2)} + 1\right)\left(\|\,\bar{\sigma}\,\|_{H^1(D'_2)} + 1\right)\|\,\sigma\,\|_{H^1(D'_2)}.$$

De la somme des inégalités (5.16), (5.23) et (5.24) on déduit (5.12). Le lemme 5.3 est démontré.

6 - Equations pour les densités de l'eau avec la température et la vitesse données.

Considérons maintenant le système d'équations pour π et σ avec $\bar{v}$ et $\bar{\vartheta}$ (et donc $\bar{T}$) données. Plus précisément on considère le système d'équations

(6.1) $$\partial_t\pi + \partial_x(\pi\bar{v}) = -\,H_{gl}(\bar{T},\pi,\sigma),$$

(6.2)
$$\partial_t\sigma(m) + \partial_x\big(\sigma(m)\bar{u}(m)\big) + \partial_m\left(m\,h_{gl}(\bar{T},\pi,m)\sigma(m)\right) = -\,h_{gl}(\bar{T},\pi,m)\sigma(m) +$$

$$+\frac{m}{2}\int_0^m\beta(m-m',m')\,\sigma(m')\sigma(m-m')dm' - m\int_0^{\bar{M}}\beta(m,m')\,\sigma(m)\sigma(m')dm' +$$
$$+g_0(m)[N^* - \tilde{N}(\sigma)]^+[\,\Theta_\delta(\pi) - \bar{\pi}_s(\bar{T})]^+ - g_1(m)\sigma(m)\,[\,\Theta_\delta(\pi) - \bar{\pi}_s(\bar{T})]^-.$$

Pour démontrer l'existence et l'unicité de la solution (π,σ) du système d'équations (6.1)-(6.2)

dans un intervalle du temps suffisamment petit, on rappelle d'abord le lemme suivant.

Lemme 6.1

Soit $R_0 > \|\,v_0\,\|_{H^1(I)} + \|\,\vartheta_0\,\|_{H^1(I)}$. *On suppose que*

(6.3)
$$\|\,\bar{v}\,\|_{L^\infty(0,t;H^1(I))\cap L^2(0,t;H^2(I))} + \|\,\bar{\vartheta}\,\|_{L^\infty(0,t;H^1(I))\cap L^2(0,t;H^2(I))} \le R_0.$$

Alors, il existe un $t_2\in]0,t_1]$ *tel que, quelques soient* $\bar{\pi}\in C\big([0,t_2];H^1(I)\big)$ *et* $\bar{\sigma}\in C\big([0,t_2];H^1(D'_2)\big)$ *avec*

(6.4)
$$\|\,\bar{\pi}\,\|_{C([0,t_2];H^1(I))} \le \|\,\pi_0\,\|_{H^1(I)} + 1, \qquad \|\,\bar{\sigma}\,\|_{C([0,t_2];H^2(D'_2))} \le \|\,\sigma_0\,\|_{H^1(D'_2)} + 1$$

la solution (π,σ) *d'équations linéarisées (5.2), (5.3) avec les conditions initiales (4.4), (4.5) satisfasse aux inégalités*

(6.5)
$$\|\,\pi\,\|_{C([0,t_2];H^1(I))} \le \|\,\pi_0\,\|_{H^1(I)} + 1, \qquad \|\,\sigma\,\|_{C([0,t_2];H^2(D'_2))} \le \|\,\sigma_0\,\|_{H^1(D'_2)} + 1.$$

Démonstration du lemme 6.1

On le déduit immédiatement de (5.11), (5.12), (5.13) et de la définition de H_{gl}.

Etant démontré ce lemme, on procède pour le lemme principal du paragraphe.

Lemme 6.2

Il existe un $t_3\in]0,t_2]$ *tel que le système d'équations (6.1), (6.2) avec les conditions initiales (4.4), (4.5) admette une solution* (π,σ) *et une seule dans la classe*
$$\pi\in C\big([0,t_3];H^1(I)\big), \quad \sigma\in C\big([0,t_3];H^1(D'_2)\big)$$

Démonstration du lemme 6.2

Pour $0 < t < t_2$ posons

$$\Gamma_{1,t} = C([0,t];H^1(I)) \times C([0,t];H^1(D'_2))$$

et définissons l'application G qui, à $(\bar{\pi},\bar{\sigma})$ associe la solution (π,σ) des équations (5.2), (5.3) avec $\bar{\pi}$ et $\bar{\sigma}$ indiqués ci-dessus. Si on pose

$$A_{[t]} = \left\{(\pi,\sigma) \in \Gamma_{1,t} / \| \pi \|_{C([0,t];H^1(I))} \leq \| \pi_0 \|_{H^1(I)} + 1, \| \sigma \|_{C([0,t];H^1(D'_2))} \leq \| \sigma_0 \|_{H^1(D'_2)} + 1\right\},$$

en vertu du lemme 6.1, on a

(6.6) $$G(A_{[t]}) \subset A_{[t]}, \quad \forall\, t \in]0,t_2].$$

Maintenant si on considère les équations (5.2), (5.3) avec $\bar{\pi} = \bar{\pi}_i, \bar{\sigma} = \bar{\sigma}_i \ (i = 1,2)$, dont on désigne la solution par π_i et σ_i $(i = 1,2)$, et si on les multiplie par $\pi_1 - \pi_2$ et $\sigma_1 - \sigma_2$ respectivement, après l'intégration et des calculs élémentaires, compte tenu que $\vartheta, \bar{\pi}_i, \bar{\sigma}_i$ et σ_i $(i = 1,2)$ satisfont à (6.3), (6.4) et (6.5), on obtient

$$\frac{d}{dt} \| \pi_1 - \pi_2 \|^2_{L^2(I)} \leq \| \bar{v} \|_{H^2(I)} \| \pi_1 - \pi_2 \|^2_{L^2(I)} +$$
$$+C \| \pi_1 - \pi_2 \|_{L^2(I)} \left(\| \bar{\pi}_1 - \bar{\pi}_2 \|_{L^2(I)} + \| \bar{\sigma}_1 - \bar{\sigma}_2 \|_{L^2(D'_2)}\right),$$
$$\frac{d}{dt} \| \sigma_1 - \sigma_2 \|^2_{L^2(D'_2)} \leq C(\| \bar{v} \|_{H^2(I)} + 1) \| \sigma_1 - \sigma_2 \|^2_{L^2(D'_2)} +$$
$$+C \| \sigma_1 - \sigma_2 \|_{L^2(D'_2)} \left(\| \bar{\pi}_1 - \bar{\pi}_2 \|_{L^2(I)} + \| \bar{\sigma}_1 - \bar{\sigma}_2 \|_{L^2(D'_2)}\right).$$

Comme $(\pi_1 - \pi_2)|_{t=0} = 0$ et $(\sigma_1 - \sigma_2)|_{t=0} = 0$, il est facile de déduire de ces inégalités qu'il existe un $t_3 \in]0,t_2]$ tel que $t \in]0,t_3]$ et pour $(\bar{\pi}_i, \bar{\sigma}_i) \in A_{[t_3]}$ on a

(6.7)
$$\| \pi_1 - \pi_2 \|^2_{L^2(I)} + \| \sigma_1 - \sigma_2 \|^2_{L^2(D'_2)} \leq K\left(\| \bar{\pi}_1 - \bar{\pi}_2 \|^2_{C([0,t];L^2(I))} + \| \bar{\sigma}_1 - \bar{\sigma}_2 \|^2_{C([0,t];L^2(D'_2))}\right)$$

avec $0 < K < 1$. Donc l'opérateur G restreint à $A_{[t_3]}$ est une contraction dans la topologie de

$$L^\infty(0,t_3;L^2(I)) \times L^\infty(0,t_3;L^2(D'_2)),$$

ce qui prouve le lemme.

7 - Démonstration du théorème A

Considérons maintenant les équations linéairisées pour ϑ et v

(7.1) $$(\varrho + \pi)\partial_t v - \eta \partial_x^2 v =$$
$$= -(\varrho + \pi)\bar{v}\partial_x \bar{v} - R\partial_x\left[\left(\frac{\varrho}{\mu_a} + \frac{\pi}{\mu_h}\right)(\bar{\vartheta} + T_0)\right] - \left(\varrho + \pi + \int_0^\infty \sigma(m)dm\right) f$$

(7.2)
$$(\varrho + \pi)c_v\partial_t\vartheta - \kappa\partial_x^2\vartheta = -(\varrho + \pi)c_v\bar{v}\partial_x\bar{\vartheta} - R\left(\frac{\varrho}{\mu_a} + \frac{\pi}{\mu_h}\right)(\bar{\vartheta} + T_0)\partial_x\bar{v} +$$
$$+\eta(\partial_x\bar{v})^2 + E_{rad} + L_{gl}H_{gl} - (\varrho + \pi)c_v\bar{v}\partial_x T_0$$

où $\bar{v}$ et $\bar{\vartheta}$ sont des fonctions données dans $L^\infty(0,t_2;H_0^1(I)) \cap L^2(0,t_2;H^2(I))$ tandis que (ϱ,π,σ) est la solution des équations (5.1), (6.1), (6.2) avec $\bar{v}$ et $\bar{\vartheta}$.

Pour les équations (7.1), (7.2), on a le lemme suivant.

Lemme 7.1

Il existe deux constantes R_v, R_ϑ et un $t_4 \in]0,t_3]$ tels que, si

(7.3) $$\| \bar{v} \|^2_{L^\infty(0,t_4;H^1(I))} + \| \partial_x\bar{v} \|^2_{L^\infty(0,t_4;H^1(I))} \leq R_v,$$

$$\| \bar{\vartheta} \|^2_{L^\infty(0,t_4;H^1(I))} + \| \partial_x\bar{\vartheta} \|^2_{L^\infty(0,t_4;H^1(I))} \leq R_\vartheta,$$

alors la solution (v,ϑ) des équations (7.1), (7.2) satisfait aux inégalités

(7.4) $$\| v \|^2_{L^\infty(0,t_4;H^1(I))} + \| \partial_x v \|^2_{L^\infty(0,t_4;H^1(I))} \leq R_v,$$
$$\| \vartheta \|^2_{L^\infty(0,t_4;H^1(I))} + \| \partial_x\vartheta \|^2_{L^\infty(0,t_4;H^1(I))} \leq R_\vartheta.$$

Démonstration du lemme 7.1

Désignons par N_1 et N_2 le deuxième membre de (7.1) et de (7.2) respectivement

(N_1 et N_2 dépendent de $\bar{v}$, $\bar{\vartheta}$, ϱ, π et σ). En multipliant (7.1) par $\frac{v}{\varrho+\pi}$ e t par $\frac{1}{\varrho+\pi}\partial_x^2 v$ et (7.2) par $\frac{\vartheta}{\varrho+\pi}$ et $\frac{1}{\varrho+\pi}\partial_x^2\vartheta$, et en les intégrant sur I, on a

(7.5)
$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\| v \|^2_{L^2} + \| \partial_x v \|^2_{L^2}\right] + \int_0^1 \frac{\eta}{\varrho+\pi}(|\partial_x v|^2 + |\partial_x^2 v|^2)dx =$$
$$= \int_0^1 N_1 \frac{v - \partial_x^2 v}{\varrho+\pi}dx + \int_0^1 \frac{\eta(\partial_x\varrho + \partial_x\pi)}{(\varrho+\pi)^2} v\,\partial_x v,$$

(7.6)
$$\frac{c_v}{2}\frac{d}{dt}\left[\| \vartheta \|^2_{L^2} + \| \partial_x\vartheta \|^2_{L^2}\right] + \int_0^1 \frac{\kappa}{\varrho+\pi}(|\partial_x\vartheta|^2 + |\partial_x^2\vartheta|^2)dx =$$
$$= \int_0^1 N_2 \frac{\vartheta - \partial_x^2\vartheta}{\varrho+\pi}dx + \int_0^1 \frac{\kappa(\partial_x\varrho + \partial_x\pi)}{(\varrho+\pi)^2}\vartheta\,\partial_x\vartheta.$$

En utilisant les estimations déjà établies pour ϱ, π et

σ et la relation

$$\| \varphi \|_{L^\infty(I)} \leq \sqrt{2} \| \varphi \|_{L^2(I)}^{1/2} \| \partial_x \varphi \|_{L^2(I)}^{1/2},$$

par les calculs de chaque terme de (7.5) et de (7.6) on parvient, sous la condition (7.3), à

(7.7)
$$\frac{d}{dt} \| v \|^2_{H^1(I)} + C_0 \| \partial_x v \|^2_{H^1(I)} \leq C_1 \left(1 + \| v \|^2_{H^1(I)}\right),$$
(7 . 8)
$$\frac{d}{dt} \| \vartheta \|^2_{H^1(I)} + C_0 \| \partial_x \vartheta \|^2_{H^1(I)} \leq C_1 \left(1 + \| \partial_x^2 \bar{v} \|_{L^2(I)}^{1/2} + \| \vartheta \|^2_{H^1(I)}\right),$$

ou C_0 est une constante strictement positive qu'on peut choisir indépendamment de R_v

et R_ϑ, tandis que C_1 est une constante dépendante de R_v et R_ϑ, c'est-à-dire

$$0 < C_1 = C_1(R_v, R_\vartheta) < \infty.$$

Cela étant, on peut choisir par exemple

$$R_v = 2\left(1 + \frac{1}{C_0}\right) \| v_0 \|^2_{H^1(I)} + 1, \qquad R_\vartheta = 2\left(1 + \frac{1}{C_0}\right) \| \vartheta_0 \|^2_{H^1(I)} + 1,$$

ce qui nous permet de choisir un $t_4 \epsilon]0, t_3]$ tel que v et ϑ vérifient (7.4). Le lemme est démontré.
Du lemme 7.1 résulte le corollaire suivant.

Corollaire

Soit $0 < t < t_4$. Soit

$$B_t = \Big\{(v, \vartheta) / \| v \|^2_{L^\infty(0,t;H^1(I))} + \| \partial_x v \|^2_{L^2(0,t;H^1(I))} \leq R_v,$$

$$\| \vartheta \|^2_{L^\infty(0,t;H^1(I))} + \| \vartheta \|^2_{L^2(0,t;H^1(I))} \leq R_\vartheta \Big\}.$$

Soit G l'opérateur, qui, à $(\bar{v}, \bar{\vartheta}) \epsilon L^\infty(0,t;H_0^1(I)) \cap L^2(0,t;H^2(I))$, associe la solution (v, ϑ) des équations linéairisées (7.1), (7.2) avec (ϱ, π, σ), qui sont la solution des équations (5.1), (6.1), (6.2). Alors on a

$$G(B_t) \subset B_t.$$

On a en outre le

Lemme 7.2

Il existe un $\bar{t} \epsilon]0, t_4]$ tel que, si $(\bar{v}_1, \bar{\vartheta}_1) \epsilon B_t$, $(\bar{v}_2, \bar{\vartheta}_2) \epsilon B_t$ alors pour $(v_i, \vartheta_i) = G(\bar{v}_i, \bar{\vartheta}_i)$ $(i = 1,2)$ on ait

(7.9)
$$\|D^{[v]}\|^2_{L^\infty(0,\bar{t};L^2(I))} + \|D^{[\vartheta]}\|^2_{L^\infty(0,\bar{t};L^2(I))} + \|D^{[v]}\|^2_{L^2(0,\bar{t};H^1(I))} + \|D^{[\vartheta]}\|^2_{L^2(0,\bar{t};H^1(I))} \leq$$
$$\leq \bar{K}\left[\|\bar{D}^{[v]}\|^2_{L^\infty(0,\bar{t};L^2(I))} + \|\bar{D}^{[\vartheta]}\|^2_{L^\infty(0,\bar{t};L^2(I))} + \|\bar{D}^{[v]}\|^2_{L^2(0,\bar{t};H^1(I))} + \|\bar{D}^{[\vartheta]}\|^2_{L^2(0,\bar{t};H^1(I))}\right],$$

avec $0 < \bar{K} < 1$, où

$$D^{[v]} = v_1 - v_2, \quad D^{[\vartheta]} = \vartheta_1 - \vartheta_2,$$
$$\bar{D}^{[v]} = \bar{v}_1 - \bar{v}_2, \ \bar{D}^{[\vartheta]} = \bar{\vartheta}_1 - \bar{\vartheta}_2.$$

Démonstration du lemme 7.2

Considérons d'abord les équations (5.1), (6.1), (6.2) avec $\bar{v}_i$ et $\bar{\vartheta}_i$, $i = 1,2$, et posons

$$E^{[\varrho]} = \varrho_1 - \varrho_2, \quad E^{[\pi]} = \pi_1 - \pi_2,$$
$$E^{[\sigma]} = \sigma_1 - \sigma_2.$$

En multipliant la différence des équations (5.1), (6.1), (6.2) avec $i = 1$ et $i = 2$

par $E^{[\varrho]}$, $E^{[\pi]}$, $E^{[\sigma]}$ et en utilisant les estimations déjà établies pour ϱ_i, π_i et σ_i

$(i = 1,2)$ et la définition de B_t, on obtient

$$\frac{d}{dt}\|E^{[\varrho]}\|^2_{L^2(I)} \leq \|\partial_x \bar{v}_1\|_{L^\infty(I)} \|E^{[\varrho]}\|^2_{L^2(I)} + C\|E^{[\varrho]}\|_{L^2(I)} \|\bar{D}^{[v]}\|_{H^1(I)},$$
$$\frac{d}{dt}\left[\|E^{[\pi]}\|^2_{L^2(I)} + \|E^{[\sigma]}\|^2_{L^2(D'_2)}\right] \leq C(1 + \|\bar{v}_1\|_{H^1(I)})\left[\|E^{[\pi]}\|^2_{L^2(I)} + \|E^{[\sigma]}\|^2_{L^2(D'_2)}\right] +$$
$$+C\left[\|\bar{D}^{[v]}\|^2_{H^1(I)} + \|\bar{D}^{[\vartheta]}\|^2_{L^2(I)}\right],$$

d'ou on déduit que

(7.10)
$$\|E^{[\varrho]}(.,t)\|^2_{L^2(I)} + \|E^{[\pi]}(.,t)\|^2_{L^2(I)} + \|E^{[\sigma]}(.,t)\|^2_{L^2(D'_2)} \leq$$

$$\leq C \int_0^t \left[\|\bar{D}^{[v]}\|^2_{H^1(I)} + \|\bar{D}^{[\vartheta]}\|^2_{L^2(I)}\right] \exp\left(C\left[(t-t') + (t-t')^{\frac{1}{2}} R_v^{\frac{1}{2}}\right]\right) dt'.$$

On considère maintenant les équations pour $D^{[v]}$ et pour $D^{[\vartheta]}$ obtenues des équations (7.1) et (7.2) multipliées par $\varrho + \pi$. En les multipliant par $D^{[v]}$ et $D^{[\vartheta]}$ respectivement et en utilisant l'inégalité

$$\left|\int_0^1 \frac{E^{[\varrho]}\partial_x^2 v_2 D^{[v]}}{(\varrho_1+\pi_1)(\varrho_2+\pi_2)} dx\right| \leq C_{\varepsilon'}\left(\|\partial_x^2 v_2\|_{L^2}^{2-\varepsilon_1}\|E^{[\varrho]}\|^2_{L^2} + \|\partial_x^2 v_2\|_{L^2}^{2\varepsilon_1}\|D^{[v]}\|^2_{L^2}\right) + \varepsilon'\|\partial_x D^{[v]}\|^2_{L^2}$$

$(\varepsilon' > 0, 0 \leq \varepsilon_1 \leq 2)$ et d'autres inégalités analogues, on obtient

$$\left|\int_0^1 \frac{E^{[\varrho]}\partial_x^2 v_2 D^{[v]}}{(\varrho_1+\pi_1)(\varrho_2+\pi_2)} dx\right| \leq C_{\varepsilon'}\left(\|\partial_x^2 v_2\|_{L^2}^{2-\varepsilon_1}\|E^{[\varrho]}\|^2_{L^2} + \|\partial_x^2 v_2\|_{L^2}^{2\varepsilon_1}\|D^{[v]}\|^2_{L^2}\right) + \varepsilon'\|\partial_x D^{[v]}\|^2_{L^2}$$

$(\varepsilon' > 0, 0 \leq \varepsilon_1 \leq 2)$ et d'autres inégalités analogues, on obtient

$$\frac{d}{dt}\left(\|D^{[v]}\|^2_{L^2} + \|D^{[\vartheta]}\|^2_{L^2}\right) + \|\partial_x D^{[v]}\|^2_{L^2} + \|\partial_x D^{[\vartheta]}\|^2_{L^2} \leq$$
$$\leq C_{\varepsilon'}\left(1 + \|\partial_x^2 \bar{v}_2\|_{L^2} + \|\partial_x^2 v_2\|_{L^2}^{2\varepsilon_1} + \|\partial_x^2 \vartheta_2\|_{L^2}^{2\varepsilon_1}\right)\left(\|D^{[v]}\|^2_{L^2} + \|D^{[\vartheta]}\|^2_{L^2}\right) +$$
$$\leq C_{\varepsilon'}\left(1 + \|\partial_x^2 \bar{v}_2\|_{L^2} + \|\partial_x^2 v_2\|_{L^2}^{2\varepsilon_1} + \|\partial_x^2 \vartheta_2\|_{L^2}^{2\varepsilon_1}\right)\left(\|D^{[v]}\|^2_{L^2} + \|D^{[\vartheta]}\|^2_{L^2}\right) +$$
$$+C_{\varepsilon'}\left(1 + \|\partial_x^2 \bar{v}_2\|_{L^2} + \|\partial_x^2 v_2\|_{L^2}^{2-\varepsilon_1} + \|\partial_x^2 \vartheta_2\|_{L^2}^{2-\varepsilon_1}\right) \times$$
$$\times\left(\|E^{[\varrho]}\|^2_{L^2} + \|E^{[\pi]}\|^2_{L^2} + \|E^{[\sigma]}\|^2_{L^2(D'_2)} + \|\bar{D}^{[v]}\|^2_{L^2} + \|\bar{D}^{[\vartheta]}\|^2_{L^2}\right) +$$
$$+\varepsilon\left(\|\partial_x D^{[v]}\|^2_{L^2} + \|\partial_x D^{[\vartheta]}\|^2_{L^2} + \|\partial_x \bar{D}^{[v]}\|^2_{L^2} + \|\partial_x \bar{D}^{[\vartheta]}\|^2_{L^2}\right)$$

$(\varepsilon > 0$), d'où , avec

$\varepsilon_1 = \frac{2}{3}, f_2(t) = 1 + \|\partial_x^2 \bar{v}_2\|_{L^2} + \|\partial_x^2 v_2\|_{L^2}^{4/3} + \|\partial_x^2 \vartheta_2\|_{L^2}^{4/3},$

on déduit que

(7.11)
$$sup_{0<t'<t}\left(\|D^{[v]}\|_{L^2}^2+\|D^{[\vartheta]}\|_{L^2}^2\right)+(1-\varepsilon)\int_0^t\left(\|\partial_x D^{[v]}\|_{L^2}^2+\|\partial_x D^{[\vartheta]}\|_{L^2}^2\right)dt'\leq$$
$$\leq 2\int_0^t\Big[C_{\varepsilon'}f_2(t')\left(\|E^{[\varrho]}\|_{L^2}^2+\|E^{[\pi]}\|_{L^2}^2+\|E^{[\sigma]}\|_{L^2(D'_2)}^2+\|\bar{D}^{[v]}\|_{L^2}^2+\|\bar{D}^{[\vartheta]}\|_{L^2}^2\right)+$$
$$+\varepsilon\left(\|\partial_x\bar{D}^{[v]}\|_{L^2}^2+\|\partial_x\bar{D}^{[\vartheta]}\|_{L^2}^2\right)\Big]\exp\left[\int_{t'}^t C_{\varepsilon'}f_2(t'')dt''\right]dt'.$$

Compte tenu que $(v_i,\vartheta_i)\epsilon B_t$, de (7.10) et de (7.11) avec un ε convenablement petit on déduit qu'il existe un $\bar{t}\epsilon\ ]0,t_4]$ tel que (7.9) soit verifiée. Le lemme est démontré.

Démonstration du théorème A.

D'après le lemme 7.2 l'opérateur G restreint à $B_{\bar{t}}$ est une contraction dans la topologie de $L^\infty(0,\bar{t};L^2(I))\cap L^2(0,\bar{t};H_0^1(I))$, ce qui, joint au corollaire du lemme 7.1, nous donne l'existence

et l'unicité de la solution (v,ϑ) dans la classe indiquée dans l'énonce du théorème.

Or, on voit aisément que les lemmes du paragraphe précédent avec v,ϑ nous donnent également ϱ,π,σ et donc v,ϑ ainsi obtenues constituent la solution de notre système d'équations. Finalement la condition $\sigma\geq 0$ s'obtient en remarquant que si $\sigma(m,x,t)=0$ alors le deuxième membre de (3.11) est positif. D'autre part, en vertu de la positivité stricte de π_0 (voir (4.4)) et de la continuité de $\pi(x,t)$, on peut choisir un éventuel $\bar{t}$ suffisamment petit de telle sorte que $inf_{(x,t)\epsilon I\times[0,\bar{t}]}\,\pi(x,t)>0$. Le théorème est démontré.

Références

[1] Buccellato, S., Fujita Yashima, H. : Système d'équations d'un gaz visqueux modélisant l'atmosphère avec la force de Coriolis et la stabilité de l'état d'équilibre. *Ann. Univ. Ferrara - Sez. V I - Sc. Mat. vol. 49 (2003), pp. 127159.*

[2] Fujita Yashima, H., Campana, V., Aissaoui, M. Z. : Système d'équations d'un modèl du mouvement de l'air impliquant la transition de phase de l'eau dans l'atmosphère. *Quaderno Dip. Mat. Univ. Torino, No. 12 (2009).*

[3] Kikoine, A. K., Kikoine, I. K. : *Physique moléculaire* (traduit du russe). Mir, Moscou, 1979.

[4] Landau, L. L., Lifchitz, E. M. : *Mécanique des fluides* (*Physique théorique, tome 6*) (traduit du russe). Mir, Moscou, 1989.

[5] Matveev, L. T. : Physique de latmosphère (en russe; plusieurs éd.). Gidrometeoizdat, Leningrad-S. Peterburg, 1965, 1984, 2000.

[6] Prodi, F., Battaglia, A. : *Meteorologia - Parte II*, *Microfisica*. *Grafica Pucci, Roma*, 2004. (voir aussi le site : http ://www.meteo.uni-bonn.de/mitarbeiter/battaglia/teaching.html).