Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino
Vol. 70, 3 (2012), 261 – 278

H. Belhireche, M.Z. Aissaoui and H. Fujita Yashima

SOLUTION GLOBALE DE L'ÉQUATION DE COAGULATION DES GOUTTELETTES EN CHUTE

Résumé. On considère l'équation intégro-différentielle décrivant le processus de coagulation des gouttelettes d'eau se trouvant dans l'air et on montre l'existence et l'unicité de la solution globale ainsi que sa convergence vers la solution stationnaire. La démonstration est basée sur les techniques développées dans l'étude de la solution satationnaire avec le vent horizontal et la construction de "cône de dépendance" pour la solution.

1. Introduction

Nous considérons le processus des gouttelettes qui tombent dans l'air et se coagulent entre elles. Du point de vue mathématique, il s'agit de l'équation de type Smoluchowski (voir [16], [11], [17]) avec le déplacement des gouttelettes déterminé par leur masse ; l'équation est formulée pour la densité $\sigma(m,t,z)$ de l'eau liquide contenue dans les gouttelettes de masse m (t et z désignent le temps et la position), densité par rapport à l'unité de volume de l'air contenant d'éventuelles gouttelettes. Dans le travail [8] on a démontré l'existence d'une solution stationnaire même en présence d'un vent horizontal. Le but du présent travail est de démontrer l'existence et l'unicité de la solution globale de cette équation dans un domaine d'une dimension spatiale ; on aura comme corollaire la convergence de la solution globale vers la solution stationnaire, si la donnée de l'entrée est constante ou tend vers une entrée constante.

Du point de vue technique, le présent travail utilise plusieurs techniques développées dans [8], en particulier l'introduction de la famille de courbes sur lesquelles on considère l'opérateur intégral de coagulation, et leurs propriétés. Toutefois, pour obtenir la solution globale on a dû établir un lemme qui précise le "cône de dépendance" de la solution.

Nous rappelons que, pour le processus de coagulation sans déplacement des gouttelettes, c'est-à-dire l'équation de Smoluchowski ordinaire, et le processus de coagulation-fragmentation, il y a une littérature considérable (voir par exemple [17], [9], [2], [10], [3], [4], [12]). Dans une recherche future on pourrait chercher des conditions plus faibles pour le coefficient de coagulation ou l'introduction de fragmentation en suivant des idées de ces travaux. Une autre perspective de la recherche sera celle d'insérer le processus de coagulation et la chute des gouttelettes dans le modèle général du mouvement de l'atmosphère, comme l'on a essayé dans [5], [1], [14].

2. Position du problème

Considérons l'intervalle $[0,1]$, qui représente l'espace "vertical" dans lequel les gouttelettes se déplacent à cause de la force gravitationnelle. Désignons par $\sigma(m,t,z)$ la densité de l'eau liquide contenue dans les gouttelettes de masse m au point $z \in [0,1]$ à l'instant $t \in \mathbb{R}$. On rappelle que dans la littérature concernant l'équation de Smoluchowski on utilise souvent le nombre (dans le sens statistique) $\tilde{n} = \tilde{n}(m,t) = \frac{\sigma(m,t,z)}{m}$ de gouttelettes de masse m au lieu de la densité de l'eau liquide $\sigma(m,t,z)$. Mais nous préférons utiliser cette dernière pour être conforme au symbolisme de [8] et de la littérature de la modélisation générale des phénomènes météorologiques ([5], [1], [14]).

Nous supposons que les gouttelettes subissent le processus de coagulation et en même temps se déplacent dans l'air par la force gravitationnelle en subissant également l'effet de frottement avec l'air environnant. Dans le présent travail nous ne considérons pas l'éventuelle condensation de la vapeur d'eau sur les gouttelettes ni l'évaporation à partir des gouttelettes ; l'absence de condensation et d'évaporation correspondrait à l'état d'équilibre entre la vapeur d'eau présente dans l'air et la densité de la vapeur saturée. Dans cette situation, on peut formuler le processus de coagulation comme dans l'équation de Smoluchowski (voir par exemple [17]) et le déplacement des gouttelettes par une vitesse déterminée par le coefficient de frottement entre les gouttelettes et l'air (comme les météorologues l'utilisent communément, voir par exemple [15]). Ces considérations nous amènent à l'équation (voir [1], [14], [8])

$$\begin{aligned} (2.1) \qquad & \partial_t \sigma(m,t,z) + \partial_z(\sigma(m,t,z)u(m)) = \\ & = \frac{m}{2}\int_0^m \beta(m-m',m')\sigma(m',t,z)\sigma(m-m',t,z)dm' + \\ & \quad -m\int_0^\infty \beta(m,m')\sigma(m,t,z)\sigma(m',t,z)dm', \end{aligned}$$

où $\beta(m_1,m_2)$ est la probabilité de rencontre entre une gouttelette de masse m_1 et une de masse m_2 (avec la valeur de probabilité normalisée par rapport à la masse), tandis que $u(m)$ désigne la vitesse des gouttelettes de masse m. Pour la fonction $\beta(m_1,m_2)$ nous supposons que

$$(2.2) \qquad \beta(\cdot,\cdot) \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+), \qquad \beta(m_1,m_2) \geq 0 \ \ \forall (m_1,m_2) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+,$$

$$(2.3) \qquad \beta(m_1,m_2) = \beta(m_2,m_1).$$

D'autre part, pour la fonction $u(m)$ nous donnons aussi l'expression

$$(2.4) \qquad u(m) = -\frac{1}{\alpha(m)}g,$$

où $\alpha(m)$ est le coefficient de frottement entre les gouttelettes de masse m et l'air.

Comme dans la nature il n'existe pas de gouttelettes de masse infèrieure à certaine valeur critique (voir [13], [6]) et que les grandes gouttelettes subissent le processus de fragmentation, nous considérons seulement les fonctions $\sigma(m,t,z)$ n'ayant les valeurs strictement positives que pour m tels que

$$0 < \overline{m}_a < m < \overline{m}_A < \infty,$$

ce qui nous permet de supposer, sans restreindre la généralité, que

$$\sup_{m\in\mathbb{R}_+} \alpha(m) < \infty, \tag{2.5}$$

$$\beta(m_1, m_2) = 0 \qquad \text{pour } \ m_1 + m_2 \geq \overline{m}_A, \tag{2.6}$$

comme il a été admis dans [1], [8]. Pour la commodité de la notation, nous posons

$$\overline{\alpha}_0 = \sup_{m\in\mathbb{R}_+} \alpha(m), \qquad \overline{u}_0 = -\frac{g}{\overline{\alpha}_0}. \tag{2.7}$$

Dans la suite nous allons envisager le problème de trouver une fonction $\sigma(m,t,z)$, qui vérifie l'équation (2.1) pour $(m,t,z) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times [0,1]$ avec la condition aux limites (condition d'entrée)

$$\sigma(m,t,1) = \overline{\sigma}_1(m,t) \tag{2.8}$$

et la condition initiale

$$\sigma(m,0,z) = \overline{\sigma}_0(m,z). \tag{2.9}$$

Conformément à ce que nous avons dit plus haut, on supposera que

$$\overline{\sigma}_1(m,t) = \overline{\sigma}_0(m,z) = 0 \qquad \text{pour } \ m \in [0, \overline{m}_a] \cup [\overline{m}_A, \infty[.$$

3. Préliminaires

Pour résoudre l'équation (2.1) avec les conditions (2.8), (2.9), nous allons la transformer en une équation différentielle ordinaire, en introduisant les variables $(\tilde{m}, \tilde{t}, \tilde{z})$ reliées à (m,t,z) par les relations

$$\begin{cases} \tilde{m} = m, \\ \tilde{z} = z, \\ \tilde{t} = t + \frac{1-z}{u(m)}. \end{cases} \tag{3.1}$$

Dans ce nouveau système de coordonnées la fonction inconnue à chercher serait

$$\tilde{\sigma}(\tilde{m}, \tilde{t}, \tilde{z}) = \sigma(m,t,z) = \sigma(m, \tilde{t} - \frac{1-z}{u(m)}, z).$$

Mais pour éviter une notation trop lourde, dans la suite on va écrire simplement m et z au lieu de $\tilde{m}$ et $\tilde{z}$ et encore $\sigma(m, \tilde{t}, z)$ au lieu de $\tilde{\sigma}(\tilde{m}, \tilde{t}, \tilde{z})$, ce qui ne causera pas d'équivoque dans le calcul.

On constate que dans les coordonnées $(m, \tilde{t}, z)$ l'équation (2.1) se transforme en

$$\frac{\partial}{\partial z}\sigma(m, \tilde{t}, z) = \tag{3.2}$$

$$= \frac{m}{2u(m)} \int_0^m \beta(m-m',m')\sigma(m',\tilde{t}^*(m,m',\tilde{t},z),z)\sigma(m-m',\tilde{t}^*(m,m-m',\tilde{t},z),z)dm' +$$

$$-\frac{m}{u(m)} \int_0^\infty \beta(m,m')\sigma(m,\tilde{t},z)\sigma(m',\tilde{t}^*(m,m',\tilde{t},z),z)dm',$$

où

$$\tilde{t}^*(m,m',\tilde{t},z) = \tilde{t} - \frac{1-z}{u(m)} + \frac{1-z}{u(m')}.$$

Nous allons réformuler l'équation (3.2) en une équation différentielle ordinaire à valeurs dans un espace de Banach (ou dans un espace de Fréchet). Pour traiter convenablement dans ce cadre fonctionnel l'opérateur intégral du deuxième membre de cette équation, nous introduisons, pour chaque $z \in [0,1]$ fixé, la famille de courbes

$$\gamma_\tau = \gamma_{\tau,z} = \{(m,\tilde{t}) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \,|\, \tilde{t} = \tau + \frac{1-z}{u(m)}\}, \qquad \tau \in \mathbb{R}. \tag{3.3}$$

Cette famille de courbes est analogue à celle utilisée dans [8], mais ici le paramètre τ est relatif au temps, tandis que dans [8] les courbes étaient paramétrisées par un paramètre spatial.

De manière analogue à [8] on définit une mesure μ_γ sur les courbes γ_τ. Plus précisément, en désignant par $P_{\mathbb{R}_+}$ la projection de γ_τ sur $\mathbb{R}_+$, on définit les ensembles mesurables de γ_τ et la mesure μ_γ sur γ_τ par les relations

i) $A' \subset \gamma_\tau$ est mesurable si et seulement si $P_{\mathbb{R}_+}A'$ est mesurable selon Lebesgue sur $\mathbb{R}_+$,

ii) $\mu_\gamma(A') = \mu_{L,\mathbb{R}_+}(P_{\mathbb{R}_+}A')$, où $\mu_{L,\mathbb{R}_+}(\cdot)$ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}_+$.

Comme les courbes γ_τ, $\tau \in \mathbb{R}$, sont parallèles (c'est-à-dire, définies par la translation de γ_0 par τ dans la direction de $\tilde{t}$), on voit immédiatement que la projection $P_{\mathbb{R}_+}$ et la mesure $\mu_\gamma(\cdot)$ ne dépendent pas de $\tau \in \mathbb{R}$.

On rappelle que la mesure $\mu_\gamma(\cdot)$ a les propriétés suivantes.

LEMME 1. *Soit A un ensemble mesurable (selon Lebesgue) de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$. On pose*

$$A_\tau = \{m \in \mathbb{R}_+ \,|\, \exists\, \tilde{t} \in \mathbb{R} \text{ tel que } (m,\tilde{t}) \in \gamma_\tau \cap A\},$$

$$A_m = \{\tau \in \mathbb{R} \,|\, \exists\, \tilde{t} \in \mathbb{R} \text{ tel que } (m,\tilde{t}) \in \gamma_\tau \cap A\}.$$

Alors on a

$$\mu_{L,\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}}(A) = \int_{-\infty}^\infty \mu_\gamma(A_\tau)d\tau = \int_{\gamma_0} \mu_{L,\mathbb{R}}(A_m)\mu_\gamma(dm) = \int_0^\infty \mu_{L,\mathbb{R}}(A_m)dm. \tag{3.4}$$

(Ici et dans la suite l'élément d'intégration par rapport à la mesure de Lebesgue s'écrit directement dm, $d\tau$ etc... sans utiliser les notations $\mu_{L,\mathbb{R}_+}(dm)$, $\mu_{L,\mathbb{R}}(d\tau)$, etc...).

LEMME 2. *Soit $\sigma(m,\tilde{t}) \in L^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$. Alors, pour presque tout $\tau \in \mathbb{R}$ la restriction de $\sigma(m,\tilde{t})$ à γ_τ appartient à $L^1(\gamma_\tau,\mu_\gamma)$.*

LEMME 3. *Soit $\sigma(m,\tilde{t}) \in L^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$. Alors on a*

$$\int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}} \sigma(m,\tilde{t}) dm d\tilde{t} = \int_{-\infty}^{\infty} \Big(\int_{\gamma_\tau} \sigma(m,\tilde{t}) \mu_\gamma(dm) \Big) d\tau =$$

$$= \int_{\gamma_0} \Big(\int_{-\infty}^{\infty} \sigma(m,\tilde{t}(m,\tau)) d\tau \Big) \mu_\gamma(dm) = \int_0^{\infty} \Big(\int_{-\infty}^{\infty} \sigma(m,\tilde{t}) d\tilde{t} \Big) dm =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \Big(\int_0^{\infty} \sigma(m,\tilde{t}) dm \Big) d\tilde{t},$$

où $\tilde{t}(m,\tau) = \tau + \frac{1-z}{u(m)}$.

LEMME 4. *Soient f et g deux fonctions appartenant à $L^1(\gamma_\tau,\mu_\gamma)$. On pose*

$$(f * g)(m) = \int_{\gamma_\tau} f(m-m') g(m') \mu_\gamma(dm').$$

Alors on a $f * g \in L^1(\gamma_\tau,\mu_\gamma)$ et

$$\|f * g\|_{L^1(\gamma_\tau,\mu_\gamma)} \le \|f\|_{L^1(\gamma_\tau,\mu_\gamma)} \|g\|_{L^1(\gamma_\tau,\mu_\gamma)}.$$

Pour la démonstration des lemmes 1, 2, 3 et 4 voir [8] (pour les notions fondamentales, voir par exemple [7]).

On pose

$$\tau(m,\tilde{t},z) = \tilde{t} - \frac{1-z}{u(m)}, \qquad \gamma^{[0,m]}_{\tau(m,\tilde{t},z)} = \gamma_{\tau(m,\tilde{t},z)} \cap [0,m] \times \mathbb{R}. \tag{3.5}$$

Cela étant, on peut écrire l'équation (3.2) dans la forme

$$\frac{\partial}{\partial z} \sigma(z) = F_z(\sigma(z)), \qquad \sigma(z) = \sigma(\cdot,\cdot,z), \tag{3.6}$$

avec

$$F_z(\sigma(z)) = F_z(\sigma(z))(m,\tilde{t}) = \tag{3.7}$$

$$= \frac{m}{2u(m)} \int_{\gamma^{[0,m]}_{\tau(m,\tilde{t},z)}} \beta(m-m',m') \sigma(m',\tilde{t}',z) \sigma(m-m',\tilde{t}'',z) \mu_\gamma(dm') +$$

$$- \frac{m}{u(m)} \int_{\gamma_{\tau(m,\tilde{t},z)}} \beta(m,m') \sigma(m',\tilde{t}',z) \sigma(m,\tilde{t},z) \mu_\gamma(dm'),$$

où $\tilde{t}'$ et $\tilde{t}''$ sont définis par les relations

$$(m',\tilde{t}') \in \gamma_{\tau(m,\tilde{t},z)}, \quad (m-m',\tilde{t}'') \in \gamma^{[0,m]}_{\tau(m,\tilde{t},z)}.$$

Analoguement, les conditions (2.8) et (2.9) se transforment en

$$\sigma(m,\tilde{t},1) = \overline{\sigma}_1^*(m,\tilde{t}), \tag{3.8}$$

$$\sigma(m,\frac{1-z}{u(m)},z) = \overline{\sigma}_0^*(m,z), \tag{3.9}$$

où $\overline{\sigma}_0^*$ et $\overline{\sigma}_1^*$ sont les fonctions obtenues de $\overline{\sigma}_0$ et $\overline{\sigma}_1$ par le changement de variables introduit ci-dessus.

4. Solution avec la condition d'entrée de classe L^1

Pour démontrer l'existence et l'unicité de la solution globale du problème (3.6)-(3.9), nous précisons d'abord que le domaine dans lequel nous allons considérer l'équation (3.6) est

$$\Omega = \bigcup_{\tau>0,\,0<z<1} \gamma_{\tau,z} = \{(m,\tilde{t},z) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times]0,1[\,|\,\tilde{t} > \frac{1-z}{u(m)}\}. \tag{4.1}$$

On pose

$$\Gamma_a = \{(m,\tilde{t},z) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times [0,1]\,|\,\tilde{t} = \frac{1-z}{u(m)}\},$$

$$\Gamma_b = \{z = 1\} \cap \overline{\Omega},$$

il est évident que l'on peut identifier Γ_b avec $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$. Les conditions (3.8) et (3.9) peuvent être écrites dans la forme

$$\sigma = \overline{\sigma}_1^* \quad \text{sur } \Gamma_b, \qquad \sigma = \overline{\sigma}_0^* \quad \text{sur } \Gamma_a. \tag{4.2}$$

Avant d'étudier le cas général du problème (3.6)-(3.9), nous allons examiner le cas où la donnée $\overline{\sigma}_1^*$ appartient à $L^1(\Gamma_b)$. Dans ce cas on a la proposition suivante.

Proposition 1. *Soient $\overline{\sigma}_{(a)} \in L^1(\Gamma_a) \cap L^\infty(\Gamma_a)$ et $\overline{\sigma}_{(b)} \in L^1(\Gamma_b) \cap L^\infty(\Gamma_b)$ telles que*

$$\overline{\sigma}_{(a)}(m,\tilde{t},z) \geq 0 \quad p.p. \text{ sur } \Gamma_a, \qquad \overline{\sigma}_{(b)}(m,\tilde{t}) \geq 0 \quad p.p. \text{ sur } \Gamma_b,$$

$$\overline{\sigma}_{(a)}(m,\tilde{t},z) = 0, \quad \overline{\sigma}_{(b)}(m,\tilde{t}) = 0 \quad \text{pour } m \in [0,\overline{m}_a] \cup [\overline{m}_A,\infty[.$$

Si

$$\max(\|\overline{\sigma}_{(a)}\|_{L^\infty(\Gamma_a)}, \|\overline{\sigma}_{(b)}\|_{L^\infty(\Gamma_b)}) < \frac{1}{M_1(\overline{m}_A - \overline{m}_a)},$$

où

$$M_1 = \sup_{2\overline{m}_a \leq m \leq \overline{m}_A,\, \overline{m}_a \leq m' \leq m - \overline{m}_a} \frac{m\alpha(m)}{2g}\beta(m-m',m'), \tag{4.3}$$

alors il existe une solution σ et une seule de l'équation (3.6) *satisfaisant aux conditions*

$$\sigma = \overline{\sigma}_{(b)} \quad \text{sur } \Gamma_b, \qquad \sigma = \overline{\sigma}_{(a)} \quad \text{sur } \Gamma_a, \tag{4.4}$$

solution appartenant à la classe

$$\sigma \in C([0,1]; L^1(\Omega_z)) \cap L^\infty(\Omega), \tag{4.5}$$

où

$$\Omega_z = \{(m,\tilde{t}) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}\,|\,\tilde{t} > \frac{1-z}{u(m)}\}. \tag{4.6}$$

Démonstration. On rappelle que l'on a démontré dans [8] une proposition analogue (proposition 5.1 de [8]) dans le cas où le domaine est

$$\Omega_\infty = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times]0,1[,$$

avec la condition d'entrée sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \{1\}$; même si dans [8] on considérait la position horizontale $x \in \mathbb{R}$ au lieu du temps t, du point de vue mathématique il s'agit de la même équation. Donc, pour démontrer la proposition, il nous suffit de transformer le problème (3.6), (4.4) en un problème dans Ω_∞ avec une condition d'entrée sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \{1\}$ de manière que la restriction de la solution de ce dernier problème à Ω nous donne la solution du problème (3.6), (4.4).

Pour ce faire, introduisons d'abord, pour chaque point $(m,\tilde{t}) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ le nombre $\zeta_1(m,\tilde{t}) \in [0,1]$ défini par la relation

$$\zeta_1(m,\tilde{t}) = \begin{cases} \max(0, 1 + \frac{\tilde{t}}{\alpha(m)} g) & \text{si } \tilde{t} \leq 0, \\ 1 & \text{si } \tilde{t} > 0. \end{cases} \tag{4.7}$$

On remarque que

$$\Omega = \{(m,\tilde{t},z) \in \Omega_\infty \,|\, 0 < z < \zeta_1(m,\tilde{t})\},$$

$$(m,\tilde{t},\zeta_1(m,\tilde{t})) \in \Gamma_b \cup \Gamma_a \quad \forall (m,\tilde{t}) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \;\; \tilde{t} \geq -\frac{\alpha(m)}{g}.$$

Prolongeons par 0 sur $\Omega_\infty \backslash \Omega$ la fonction $F_z(\sigma(z))(m,\tilde{t})$ définie dans (3.7) ; plus précisément on pose

$$\tilde{F}_z(\sigma(z))(m,\tilde{t}) = \begin{cases} F_z(\sigma(z))(m,\tilde{t}) & \text{si } 0 \leq z \leq \zeta_1(m,\tilde{t}), \\ 0 & \text{si } \zeta_1(m,\tilde{t}) < z \leq 1. \end{cases} \tag{4.8}$$

On pose en outre

$$\overline{\sigma}_{(a,b)}(m,\tilde{t}) = \begin{cases} \overline{\sigma}_{(a)}(m,\tilde{t},\zeta_1(m,\tilde{t})) & \text{si } -\frac{\alpha(m)}{g} \leq \tilde{t} \leq 0, \\ \overline{\sigma}_{(b)}(m,\tilde{t}) & \text{si } \tilde{t} > 0, \\ 0 & \text{si } \tilde{t} < -\frac{\alpha(m)}{g}. \end{cases} \tag{4.9}$$

Cela étant, on considère l'équation

$$\frac{\partial}{\partial z}\tilde{\sigma}(z) = \tilde{F}_z(\tilde{\sigma}(z)), \qquad \tilde{\sigma}(z) = \tilde{\sigma}(\cdot,\cdot,z) \qquad \text{dans } \Omega_\infty \tag{4.10}$$

avec la condition

$$\tilde{\sigma}(m,\tilde{t},1) = \overline{\sigma}_{(a,b)}(m,\tilde{t}) \qquad \text{dans } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \tag{4.11}$$

ou, en forme intégrale,

$$\tilde{\sigma}(m,\tilde{t},z) = \overline{\sigma}_{(a,b)}(m,\tilde{t}) - \int_z^1 \tilde{F}_{z'}(\tilde{\sigma}(z'))(m,\tilde{t})dz'. \tag{4.12}$$

En vertu de (4.8) et (4.9), il résulte de (4.12) que

$$\tilde{\sigma}(m,\tilde{t},\zeta_1(m,\tilde{t})) = \overline{\sigma}_{(a)}(m,\tilde{t},\zeta_1(m,\tilde{t})) \qquad \text{si } -\frac{\alpha(m)}{g} \le \tilde{t} \le 0,$$

$$\tilde{\sigma}(m,\tilde{t},\zeta_1(m,\tilde{t})) = \tilde{\sigma}(m,\tilde{t},1) = \overline{\sigma}_{(b)}(m,\tilde{t}) \qquad \text{si } \tilde{t} > 0,$$

c'est-à-dire

$$\tilde{\sigma} = \overline{\sigma}_{(b)} \quad \text{sur } \Gamma_b, \qquad \tilde{\sigma} = \overline{\sigma}_{(a)} \quad \text{sur } \Gamma_a. \tag{4.13}$$

De la sorte, si $\tilde{\sigma}(m,\tilde{t},z)$ vérifie (4.12), alors $\tilde{\sigma}(m,\tilde{t},z)$ vérifie également

$$\tilde{\sigma}(m,\tilde{t},z) = \overline{\sigma}_{(a)}(m,\tilde{t},\zeta_1(m,\tilde{t})) - \int_z^{\zeta_1(m,\tilde{t})} \tilde{F}_{z'}(\tilde{\sigma}(z'))(m,\tilde{t})dz' \tag{4.14}$$

$$\text{pour } -\frac{\alpha(m)}{g} \le \tilde{t} \le 0,\ 0 \le z \le \zeta_1(m,\tilde{t}),$$

$$\tilde{\sigma}(m,\tilde{t},z) = \overline{\sigma}_{(b)}(m,\tilde{t}) - \int_z^1 \tilde{F}_{z'}(\tilde{\sigma}(z'))(m,\tilde{t})dz' \qquad \text{pour } \tilde{t} > 0. \tag{4.15}$$

On déduit de (4.13), (4.14) et (4.15) que, si $\tilde{\sigma}(m,\tilde{t},z)$ vérifie (4.12) (ou (4.10) et (4.11)), alors la restriction $\sigma = \tilde{\sigma}|_\Omega$ de $\tilde{\sigma}$ sur Ω vérifie (3.6) et (4.4).

Pour appliquer la proposition 5.1 de [8] au problème (4.12) (ou (4.10) et (4.11)), nous rappelons que l'opérateur $\tilde{F}_z(\tilde{\sigma}(z))$ ne diffère de l'opérateur $F_z(\sigma(z))$ utilisé dans la proposition 5.1 de [8] que par la relation

$$\tilde{F}_z(\tilde{\sigma}(z))(m,\tilde{t}) = 0 \qquad \text{dans } \Omega_\infty \backslash \Omega, \tag{4.16}$$

au lieu d'être du même type que dans Ω. Nous remarquons aussi que chaque courbe $\gamma_{\tau,z}$ appartient entièrement à Ω ou entièrement à $\Omega_\infty\backslash\Omega$ ou bien entièrement à l'interface $\overline{\Omega} \cap \overline{\Omega_\infty\backslash\Omega}$ (donc la condition (4.16) ne modifie pas le résultat de l'application de $\tilde{F}_z(\tilde{\sigma}(z))$ dans Ω) et que la mesure $\mu_\gamma(\cdot)$ sur les courbes $\gamma_{\tau,z}$ jouit des mêmes propriétés (lemmes 1 - 4) que l'on a utilisées dans la démonstration de la proposition 5.1 de [8]. Comme la démonstration de la proposition 5.1 de [8] utilise exclusivement l'estimation des normes de $\sigma(\cdot,\cdot,z)$ dans $L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ et dans $L^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$, la "troncature" (4.16) de $\tilde{F}_z(\tilde{\sigma}(z))(m,\tilde{t})$ dans $\Omega_\infty\backslash\Omega$ ne modifie pas les raisonnements de la démonstration de la proposition 5.1 de [8].

Rappelons les conditions sur $\overline{\sigma}_{(a,b)}$. En rappelant la définition (4.9), qui implique entre autres

$$\|\overline{\sigma}_{(a,b)}\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})} = \max(\|\overline{\sigma}_{(a)}\|_{L^\infty(\Gamma_a)}, \|\overline{\sigma}_{(b)}\|_{L^\infty(\Gamma_b)}), \tag{4.17}$$

nous pouvons transformer les conditions pour $\overline{\sigma}_{(a)}$ et $\overline{\sigma}_{(b)}$ de la proposition 1 en les conditions pour $\overline{\sigma}_{(a,b)}$ sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$

$$\overline{\sigma}_{(a,b)}(\cdot,\cdot) \in L^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}), \tag{4.18}$$

$$\overline{\sigma}_{(a,b)}(m,\tilde{t}) \geq 0 \quad \text{p.p. dans } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \tag{4.19}$$

$$\operatorname{supp}(\overline{\sigma}_{(a,b)}) \subset [\overline{m}_a, \overline{m}_A] \times \mathbb{R}, \tag{4.20}$$

$$\|\overline{\sigma}_{(a,b)}\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})} < \frac{1}{M_1(\overline{m}_A - \overline{m}_a)}. \tag{4.21}$$

Comme les conditions (4.18)-(4.21) sont les mêmes conditions que celles de la proposition 5.1 de [8], d'après cette proposition (plus précisément une variante de cette proposition avec la "troncature" de $\tilde{F}_z(\tilde{\sigma}(z))(m,\tilde{t})$, qui, comme nous l'avons remarqué, ne modifie pas le résultat), il existe une solution $\tilde{\sigma}$ et une seule du problème (4.12) (ou (4.10) et (4.11)) dans la classe

$$\tilde{\sigma} \in C([0,1]; L^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times [0,1]).$$

Comme nous l'avons remarqué en haut, la restriction $\sigma = \tilde{\sigma}|_\Omega$ vérifie (3.6) et (4.4). La proposition est démontrée.

□

5. Existence et unicité de la solution globale dans le temps

Pour démontrer un théorème d'existence et d'unicité de la solution globale dans le cas général, on va établir la propriété de "cône de dépendance" pour l'équation (3.6). Pour ce faire, on considère un ensemble mesurable ω de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ avec $0 < mes(\omega) < \infty$. On définit

$$D[\omega] = \bigcup_{(m,\tilde{t})\in\omega} D_{(m,\tilde{t})}, \tag{5.1}$$

où

$$D_{(m,\tilde{t})} = \bigcup_{0\leq z\leq 1} \Big(\bigcup_{\tau_-(m,\tilde{t},z)\leq\tau\leq\tau_+(m,\tilde{t})} \gamma_{\tau,z} \Big) = \tag{5.2}$$

$$= \{(m',\tilde{t}',z') \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times [0,1] \mid \tilde{t}' = \tau + \frac{1-z'}{u(m')}, \tau_-(m,\tilde{t},z') \leq \tau \leq \tau_+(m,\tilde{t})\},$$

avec

$$\begin{cases} \tau_+(m,\tilde{t}) = \tau(m,\tilde{t},0) = \tilde{t} - \frac{1}{u(m)}, \\ \tau_-(m,\tilde{t},z) = \max(0,\ \tau_+(m,\tilde{t}) + \frac{z}{\overline{u}_0}) = \max(0,\ \tilde{t} - \frac{1}{u(m)} + \frac{z}{\overline{u}_0}) \end{cases} \tag{5.3}$$

(pour $\overline{u}_0$, voir (2.7)). On définit également $D_\omega(z)$ par

$$D_\omega(z) = \bigcup_{(m,\tilde{t})\in\omega} \Big(\bigcup_{\tau_-(m,\tilde{t},z)\leq\tau\leq\tau_+(m,\tilde{t})} \gamma_{\tau,z} \Big) = \{(m',\tilde{t}',z') \in D[\omega] \mid z' = z\}; \tag{5.4}$$

on remarque que $D_\omega(z_1)$ est l'intersection de $\bigcup_{(m,\tilde{t})\in\omega} D_{(m,\tilde{t})}$ et du plan $z = z_1$. D'après la définition de l'ensemble $D_{(m,\tilde{t})}$ (voir aussi la définition (3.5) de $\tau(m,\tilde{t},z)$), on remarque que

$$(m',\tilde{t}',z') \in D_{(m,\tilde{t})} \Rightarrow \gamma_{\tau(m',\tilde{t}',z'),z'} \subset D_{(m,\tilde{t})},$$

$$\tau(m_1,\tilde{t}_1,0) = \tau(m_2,\tilde{t}_2,0) \Rightarrow D_{(m_1,\tilde{t}_1)} = D_{(m_2,\tilde{t}_2)};$$

cette dernière relation signifie que, si $(m_1,\tilde{t}_1)$ et $(m_2,\tilde{t}_2)$ se trouvent sur une courbe $\gamma_{\tau,0}$, alors ils définissent le même ensemble.

La propriété de "cône de dépendance" est donnée par le lemme suivant.

LEMME 5. *Soient $\overline{\sigma}^{[1]}_{(a)}$ et $\overline{\sigma}^{[2]}_{(a)}$ deux fonctions définies sur Γ_a, $\overline{\sigma}^{[1]}_{(b)}$ et $\overline{\sigma}^{[2]}_{(b)}$ deux fonctions définies sur Γ_b. On suppose que $\overline{\sigma}^{[1]}_{(a)}$, $\overline{\sigma}^{[2]}_{(a)}$, $\overline{\sigma}^{[1]}_{(b)}$, $\overline{\sigma}^{[2]}_{(b)}$ satisfont aux conditions de la proposition 1. Soit $\sigma^{[1]}$(resp. $\sigma^{[2]}$) la solution de l'équation* (3.6) *avec la condition* (4.4) *avec $\overline{\sigma}_{(a)} = \overline{\sigma}^{[1]}_{(a)}$, $\overline{\sigma}_{(b)} = \overline{\sigma}^{[1]}_{(b)}$ (resp. $\overline{\sigma}_{(a)} = \overline{\sigma}^{[2]}_{(a)}$, $\overline{\sigma}_{(b)} = \overline{\sigma}^{[2]}_{(b)}$). Si*

$$\overline{\sigma}^{[1]}_{(b)} = \overline{\sigma}^{[2]}_{(b)} \quad \textit{sur } \Gamma_b \cap D[\omega], \qquad \overline{\sigma}^{[1]}_{(a)} = \overline{\sigma}^{[2]}_{(a)} \quad \textit{sur } \Gamma_a \cap D[\omega], \tag{5.5}$$

alors on a

$$\sigma^{[1]} = \sigma^{[2]} \quad \textit{p.p. dans } D[\omega].$$

Démonstration. En transformant l'équation (3.6) en forme intégrale, on a

$$\sigma^{[i]}(m,\tilde{t},z) = \sigma^{[i]}(m,\tilde{t},\zeta_1(m,\tilde{t}))+$$

$$-\frac{m}{2u(m)}\int_z^{\zeta_1}\int_{\gamma^{[0,m]}_{\tau(m,\tilde{t},z'),z'}} \beta(m-m',m')\sigma^{[i]}(m',\tilde{t}',z')\sigma^{[i]}(m-m',\tilde{t}'',z')\mu_\gamma(dm')dz'+$$

$$+\frac{m}{u(m)}\int_z^{\zeta_1}\int_{\gamma_{\tau(m,\tilde{t},z'),z'}} \beta(m,m')\sigma^{[i]}(m',\tilde{t}',z')\sigma^{[i]}(m,\tilde{t},z')\mu_\gamma(dm')dz', \qquad i=1,2,$$

tandis que les conditions (3.8)-(3.9) nous donnent

$$\sigma^{[i]}(m,\tilde{t},\zeta_1(m,\tilde{t})) = \begin{cases} \overline{\sigma}^{[i]}_{(a)} & \text{sur } \Gamma_a, \\ \overline{\sigma}^{[i]}_{(b)} & \text{sur } \Gamma_b, \end{cases}$$

$\zeta_1(m,\tilde{t})$ étant le nombre défini dans (4.7). En faisant la différence de cette équation pour $i = 1$ et $i = 2$, on a

$$|\sigma^{[1]}(m,\tilde{t},z)-\sigma^{[2]}(m,\tilde{t},z)| \leq |\sigma^{[1]}(m,\tilde{t},\zeta_1(m,\tilde{t}))-\sigma^{[2]}(m,\tilde{t},\zeta_1(m,\tilde{t}))|+$$

$$+C_\beta\Big[\int_z^{\zeta_1}\int_{\gamma^{[0,m]}_{\tau(m,\tilde{t},z'),z'}} \Big(\Big|\sigma^{[1]}(m-m',\tilde{t}'',z')-\sigma^{[2]}(m-m',\tilde{t}'',z')\Big|\sigma^{[2]}(m',\tilde{t}',z')+$$

$$+\Big|\sigma^{[1]}(m',\tilde{t}',z')-\sigma^{[2]}(m',\tilde{t}',z')\Big|\sigma^{[1]}(m-m',\tilde{t}'',z')\Big)\mu_\gamma(dm')dz'+$$

$$+\int_z^{\zeta_1}\int_{\gamma_{\tau(m,\tilde{t},z'),z'}}\Big(\Big|\sigma^{[1]}(m,\tilde{t},z')-\sigma^{[2]}(m,\tilde{t},z')\Big|\sigma^{[2]}(m',\tilde{t}',z')+$$

$$+\Big|\sigma^{[1]}(m',\tilde{t}',z')-\sigma^{[2]}(m',\tilde{t}',z)\Big|\sigma^{[1]}(m,\tilde{t},z')\Big)\mu_\gamma(dm')dz'\Big],$$

où

$$C_\beta = \max\Big[\sup_{0<m'<m<\infty}\frac{m}{2u(m)}\beta(m-m',m'),\ \sup_{m,m'\in\mathbb{R}_+}\frac{m}{u(m)}\beta(m,m')\Big].$$

On en déduit que

$$(5.6)\qquad |\sigma^{[1]}(m,\tilde{t},z)-\sigma^{[2]}(m,\tilde{t},z)| \le |\sigma^{[1]}(m,\tilde{t},\zeta_1(m,\tilde{t}))-\sigma^{[2]}(m,\tilde{t},\zeta_1(m,\tilde{t}))|+$$

$$+C_\beta\Big[\int_z^1\Big(\|\sigma^{[1]}(\cdot,\cdot,z')-\sigma^{[2]}(\cdot,\cdot,z')\|_{L^\infty(\gamma_{\tau(m,\tilde{t},z'),z'})}\|\sigma^{[2]}(\cdot,\cdot,z')\|_{L^1(\gamma_{\tau(m,\tilde{t},z'),z'})}+$$

$$+\|\sigma^{[1]}(\cdot,\cdot,z')\|_{L^1(\gamma_{\tau(m,\tilde{t},z'),z'})}\|\sigma^{[1]}(\cdot,\cdot,z')-\sigma^{[2]}(\cdot,\cdot,z')\|_{L^\infty(\gamma_{\tau(m,\tilde{t},z'),z'})}\Big)dz'+$$

$$+\int_z^1\Big(\|\sigma^{[1]}(\cdot,\cdot,z')-\sigma^{[2]}(\cdot,\cdot,z')\|_{L^\infty(\gamma_{\tau(m,\tilde{t},z'),z'})}\|\sigma^{[2]}(\cdot,\cdot,z')\|_{L^1(\gamma_{\tau(m,\tilde{t},z'),z'})}+$$

$$+(\overline{m}_A-\overline{m}_a)\|\sigma^{[1]}(\cdot,\cdot,z')\|_{L^\infty(\gamma_{\tau(m,\tilde{t},z'),z'})}\|\sigma^{[1]}(\cdot,\cdot,z')-\sigma^{[2]}(\cdot,\cdot,z')\|_{L^\infty(\gamma_{\tau(m,\tilde{t},z'),z'})}\Big)dz'\Big].$$

Considérons maintenant un point générique $(m,\tilde{t},z)$ de $D[\omega]$. En vertu de (5.2)-(5.3) il existe $(m_0,\tilde{t}_0)\in\omega\subset\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}$ tel que

$$\max(0,\ \tilde{t}_0-\frac{1}{u(m_0)}+\frac{z}{\overline{u}_0}) = \tau_-(m_0,\tilde{t}_0,z)\le\tilde{t}-\frac{1-z}{u(m)}\le\tau_+(m_0,\tilde{t}_0)=\tilde{t}_0-\frac{1}{u(m_0)}.$$

Cette inégalité, jointe à l'inégalité $u(m)\le\overline{u}_0<0$, implique que, pour $0\le z\le z'\le 1$, on a

$$\tilde{t}_0-\frac{1}{u(m_0)}+\frac{z'}{\overline{u}_0}\le\tilde{t}-\frac{1-z'}{u(m)}\le\tilde{t}_0-\frac{1}{u(m_0)},$$

ou, en vertu de (3.5), (5.3), on a

$$\tau_-(m_0,\tilde{t}_0,z')\le\tau(m,\tilde{t},z')\le\tau_+(m_0,\tilde{t}_0),$$

ce qui, d'après la définition (5.4) de l'ensemble $D_\omega(z)$, démontre que

$$\gamma_{\tau(m,\tilde{t},z'),z'}\subset D_\omega(z')\qquad\text{pour } 0\le z\le z'\le\zeta_1(m,\tilde{t})\le 1.$$

On rappelle que l'on a en outre, pour $i=1,2$,

$$\|\sigma^{[i]}(\cdot,\cdot,z)\|_{L^1(\gamma_{\tau(m,\tilde{t},z),z},\mu_\gamma)}\le(\overline{m}_A-\overline{m}_a)\|\sigma^{[i]}(\cdot,\cdot,z)\|_{L^\infty(\gamma_{\tau(m,\tilde{t},z),z})}\le$$

$$\le(\overline{m}_A-\overline{m}_a)\|\sigma^{[i]}(\cdot,\cdot,z)\|_{L^\infty(D_\omega(z))},$$

pour presque tout $(m,\tilde{t})\in\Omega_z$ (voir (4.6)).

Cela étant, de (5.6) on déduit que

$$\|\sigma^{[1]}(\cdot,\cdot,z)-\sigma^{[2]}(\cdot,\cdot,z)\|_{L^\infty(D_\omega(z))}\leq$$

$$\leq\Big(\|\overline{\sigma}^{[1]}_{(b)}-\overline{\sigma}^{[2]}_{(b)}\|_{L^\infty(\Gamma_b\cap D[\omega])}+\|\overline{\sigma}^{[1]}_{(a)}-\overline{\sigma}^{[2]}_{(a)}\|_{L^\infty(\Gamma_a\cap D[\omega])}\Big)+$$

$$+C\int_z^1\Big(\|\sigma^{[1]}(.,.,z')\|_{L^\infty(D_\omega(z'))}+\|\sigma^{[2]}(.,.,z')\|_{L^\infty(D_\omega(z'))}\Big)\times$$

$$\times\|\sigma^{[1]}(\cdot,\cdot,z')-\sigma^{[2]}(\cdot,\cdot,z')\|_{L^\infty(D_\omega(z'))}dz',$$

où C est une constante indépendante de z. A l'aide du lemme de Gronwall, on en déduit que

$$\|\sigma^{[1]}(\cdot,\cdot,z)-\sigma^{[2]}(\cdot,\cdot,z)\|_{L^\infty(D_\omega(z))}\leq \tag{5.7}$$

$$\leq\Big(\|\overline{\sigma}^{[1]}_{(b)}-\overline{\sigma}^{[2]}_{(b)}\|_{L^\infty(\Gamma_b\cap D[\omega])}+\|\overline{\sigma}^{[1]}_{(a)}-\overline{\sigma}^{[2]}_{(a)}\|_{L^\infty(\Gamma_a\cap D[\omega])}\Big)\times$$

$$\times\exp\Big(C\int_z^1(\|\sigma^{[1]}(\cdot,\cdot,z')\|_{L^\infty(D_\omega(z'))}+\|\sigma^{[2]}(\cdot,\cdot,z')\|_{L^\infty(D_\omega(z'))})dz'\Big).$$

Or, en vertu de l'hypothèse (5.5) on a

$$\|\overline{\sigma}^{[1]}_{(b)}-\overline{\sigma}^{[2]}_{(b)}\|_{L^\infty(\Gamma_b\cap D[\omega])}=\|\overline{\sigma}^{[1]}_{(a)}-\overline{\sigma}^{[2]}_{(a)}\|_{L^\infty(\Gamma_a\cap D[\omega])}=0,$$

ce qui nous permet de déduire de (5.7) que

$$\|\sigma^{[1]}(\cdot,\cdot,z)-\sigma^{[2]}(\cdot,\cdot,z)\|_{L^\infty(D_\omega(z))}\leq 0,$$

ou, compte tenu de la relation $D[\omega]=\bigcup_{0\leq z\leq 1}D_\omega(z)$,

$$\sigma^{[1]}(m,\tilde{t},z)=\sigma^{[2]}(m,\tilde{t},z)\qquad \text{p.p. dans } D[\omega].$$

Le lemme est démontré.

□

Maintenant nous pouvons démontrer le théorème principal.

Théorème 1. *Si $\overline{\sigma}^*_0\in L^\infty(\Gamma_a)$ et $\overline{\sigma}^*_1\in L^\infty(\Gamma_b)$ satisfont aux conditions*

$$\overline{\sigma}^*_0(m,\tilde{t},z)\geq 0\quad p.p.\ sur\ \Gamma_a,\qquad \overline{\sigma}^*_1(m,\tilde{t})\geq 0\quad p.p.\ sur\ \Gamma_b, \tag{5.8}$$

$$\overline{\sigma}^*_0(m,\tilde{t},z)=0,\quad \overline{\sigma}^*_1(m,\tilde{t})=0\qquad pour\ m\in[0,\overline{m}_a]\cup[\overline{m}_A,\infty[, \tag{5.9}$$

$$\max\left(\|\overline{\sigma}^*_0\|_{L^\infty(\Gamma_a)};\|\overline{\sigma}^*_1\|_{L^\infty(\Gamma_b)}\right)<\frac{1}{M_1(\overline{m}_A-\overline{m}_a)}, \tag{5.10}$$

M_1 étant la constante indiquée dans la proposition 1, alors l'équation (3.6) *avec la condition* (4.2) *admet une solution σ et une seule appartenant à la classe*

$$\sigma \in L^\infty(\Omega)$$

et σ vérifie les relations

$$\sigma(m,\tilde{t},z) \geq 0 \quad p.p.\ dans\ \Omega,$$

$$\sigma(m,\tilde{t},z) = 0, \quad pour\ m \in [0,\overline{m}_a] \cup [\overline{m}_A,\infty[.$$

Démonstration. Pour démontrer l'existence de la solution globale dans le temps du problème (3.6), (4.2), on considère une famille d'ensembles mesurables et bornés ω_i, $i \in \mathbb{N}$, définis par

$$\omega_i = \{(m,\tilde{t}) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} | \overline{m}_a \leq m \leq \overline{m}_A,\ \frac{1}{u(m)} \leq \tilde{t} \leq i\} = \tag{5.11}$$

$$= \Omega_0 \cap \{(m,\tilde{t}) \in [\overline{m}_a, \overline{m}_A] \times \mathbb{R} |\ \tilde{t} \leq i\},$$

où Ω_0 est l'ensemble défini dans (4.6) avec $z = 0$. La définition de $D[\omega]$ (voir (5.1), (5.2)) nous permet de définir un nombre N tel que

$$D_{\omega_i}(1) \subset \{(m,\tilde{t}) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} | \tilde{t} \leq i+N\} \qquad \text{pour tout } i \in \mathbb{N}. \tag{5.12}$$

On considère une fonction $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que

$$\psi(s) = \begin{cases} 1 & \text{si } s \leq 0, \\ 0 & \text{si } s \geq 1 \end{cases}$$

avec $0 \leq \psi(s) \leq 1$ $\forall s \in [0,1]$ et on pose

$$\psi_i(\tilde{t}) = \psi(\tilde{t} - (i+N)); \tag{5.13}$$

on a évidement

$$D_{\omega_i}(1) \subset \{(m,\tilde{t}) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} | \psi_i(\tilde{t}) = 1\} \qquad \text{pour tout } i \in \mathbb{N}. \tag{5.14}$$

Cela étant, on considère la famille d'équations

$$\partial_z \sigma^{[i]}(m,\tilde{t},z) = F(\sigma^{[i]}(z))(m,\tilde{t}), \qquad i \in \mathbb{N} \tag{5.15}$$

(avec $F(\cdot)$ définie dans (3.6)), complétées par les conditions

$$\sigma^{[i]} = \psi_i \overline{\sigma}_1^* \quad \text{sur } \Gamma_b, \qquad \sigma^{[i]} = \overline{\sigma}_0^* \quad \text{sur } \Gamma_a. \tag{5.16}$$

D'après la proposition 1 (avec $\overline{\sigma}_{(b)} = \psi_i \overline{\sigma}_1^*$ et $\overline{\sigma}_{(a)} = \overline{\sigma}_0^*$) le problème (5.15)-(5.16) admet une unique solution $\sigma = \sigma^{[i]} \in C([0,1]; L^1(\Omega_z)) \cap L^\infty(\Omega)$ telle que

$$\sigma^{[i]} \geq 0 \quad \text{p.p. dans } \Omega, \qquad \sigma^{[i]}(m,\tilde{t},z) = 0 \quad \text{pour } m \in [0,\overline{m}_a] \cup [\overline{m}_A,\infty[.$$

D'autre part, d'après la définition des ensembles ω_i (voir (5.11)), on a

$$D[\omega_i] \subset D[\omega_{i'}] \qquad \text{pour } i \leq i'.$$

Par conséquent, en vertu du lemme 5 et de (5.16) (voir aussi (5.13)), on a

$$\sigma^{[i]} = \sigma^{[i']} \quad \text{p.p. dans } D[\omega_i] \quad \text{pour } i \leq i'.$$

Donc, en définissant σ par

$$\sigma = \begin{cases} \sigma^{[0]} & \text{dans} \quad \Omega \cap D[\omega_0], \\ \sigma^{[i]} & \text{dans} \quad D[\omega_i] \setminus D[\omega_{i-1}], \quad i = 1, 2, \cdot, \cdot, \cdot, \end{cases}$$

on a

$$\sigma = \sigma^{[i]} \qquad \text{p.p. dans } \Omega \cap D[\omega_i] \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Par suite, en vertu de (5.15) on a

$$\partial_z \sigma(m, \tilde{t}, z) = F(\sigma(z))(m, \tilde{t}), \qquad \text{dans } \Omega \cap D[\omega_i] \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

En outre, en vertu de (5.14) et (5.16), on a

$$\sigma = \sigma^{[i]} = \overline{\sigma}_1^* \qquad \text{sur} \quad \Gamma_b \cap D[\omega_i], \qquad \sigma = \sigma^{[i]} = \overline{\sigma}_0^* \quad \text{sur } \Gamma_a \cap D[\omega_i].$$

Donc, en rappelant les relations $\Omega \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} D[\omega_i]$ et $\Gamma_b \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} D_{\omega_i}(1)$ qui résultent de la définition de ω_i, $D[\omega_i]$, $D_{\omega_i}(1)$, on peut conclure qu'il existe une solution du problème (3.6),(4.2).

Pour démontrer l'unicité de la solution, considérons deux éventuelles solutions σ_1, σ_2 du problème (3.6),(4.2). Si $\sigma_1 \neq \sigma_2$ sur un ensemble de mesure strictement positive, alors on peut choisir un ensemble mesurable ω tel que $0 < mes(\omega) < \infty$ et que $mes(\{(m, \tilde{t}, z) \in D[\omega] \,|\, \sigma_1 \neq \sigma_2\}) > 0$. Or comme σ_1 et σ_2 sont des solutions du problème (3.6),(4.2), $\sigma_1 = \sigma_2$ sur $\Gamma_a \cup \Gamma_b$, en particulier $\sigma_1 = \sigma_2$ sur $(\Gamma_a \cup \Gamma_b) \cap D[\omega]$; cette condition entraîne, d'après le lemme 5, que $\sigma_1 = \sigma_2$ dans $D[\omega]$, ce qui prouve qu'il n'est pas possible d'avoir deux solutions σ_1 et σ_2 qui se diffèrent sur un ensemble de mesure strictement positive. L'unicité de la solution est démontrée.

□

En retournant aux coordonnées (m, t, z), on peut exprimer le résultat dans la forme suivante.

Théorème 2. *Si $\overline{\sigma}_0 \in L^\infty(\mathbb{R}_+ \times [0,1])$ et $\overline{\sigma}_1 \in L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+)$ satisfont aux conditions*

$$\overline{\sigma}_0(m, z) \geq 0 \quad p.p.\ sur\ \mathbb{R}_+ \times [0,1], \qquad \overline{\sigma}_1(m, t) \geq 0 \quad p.p.\ sur\ \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+,$$

$$\overline{\sigma}_0(m, z) = 0, \quad \overline{\sigma}_1(m, t) = 0 \qquad pour\ m \in [0, \overline{m}_a] \cup [\overline{m}_A, \infty[,$$

$$\max\left(\|\overline{\sigma}_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+ \times [0,1])}; \|\overline{\sigma}_1\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+)}\right) < \frac{1}{M_1(\overline{m}_A - \overline{m}_a)},$$

M_1 étant la constante indiquée dans la proposition 1, alors l'équation (2.1) *avec les conditions* (2.8) *et* (2.9) *admet une solution σ et une seule appartenant à la classe*

$$\sigma \in L^{\infty}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times]0,1[)$$

et σ vérifie les relations

$$\sigma(m,t,z) \geq 0 \ p.p. \ dans \ \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times]0,1[,$$

$$\sigma(m,t,z) = 0, \quad pour \ m \in [0, \overline{m}_a] \cup [\overline{m}_A, \infty[.$$

Démonstration. Rappelons qu'avec le changement de variables $(m,t,z) \mapsto (m,\tilde{t},z)$ introduit par (3.1), on a transformé l'équation (2.1) et les conditions (2.8)-(2.9) dans (3.6) et (4.2). Donc, si $\tilde{\sigma}(m,\tilde{t},z)$ est la solution du problème (3.6), (4.2) dont l'existence et l'unicité ont été démontrées dans le théorème 1, alors, en faisant retourner les fonctions dans les coordonnées (m,t,z), on voit que la fonction

$$\sigma(m,t,z) = \tilde{\sigma}(m, t + \frac{1-z}{u(m)}, z)$$

satisfait à l'équation (2.1) et aux conditions (2.8)-(2.9). L'unicité de la solution σ découle de celle de $\tilde{\sigma}$ démontrée dans le théorème 1.

$\square$

6. Convergence de la solution globale vers la solution stationnaire

Le resultat obtenu dans le paragraphe 5 nous donne également la convergence de la solution globale vers la solution stationnaire. Rappelons d'abord le resultat sur la solution stationnaire. On considère l'équation

$$\partial_z \sigma(m,z) = -\frac{m\alpha(m)}{2g} \int_0^m \beta(m-m',m')\sigma(m',z)\sigma(m-m',z)dm' + \\ + \frac{m\alpha(m)}{g} \int_0^{\infty} \beta(m,m')\sigma(m,z)\sigma(m',z)dm' \tag{6.1}$$

(pour $\alpha(m)$ voir (2.4)) avec la condition aux limites (condition d'entrée)

$$\sigma(m,1) = \overline{\sigma}(m). \tag{6.2}$$

Proposition 2. *Soit $\overline{\sigma}(\cdot) \in L^1(\mathbb{R}_+)$ avec $\overline{\sigma} \geq 0$, $\overline{\sigma}(m) = 0$ pour $m \in [0, \overline{m}_a] \cup [\overline{m}_A, \infty[$. Alors le problème* (6.1)–(6.2) *admet une unique solution $\sigma \in C([0,1]; L^1(\mathbb{R}_+))$ (c'est-à-dire, l'application $z \longmapsto \sigma(\cdot, z)$ est une fonction continue de $[0,1]$ à valeurs dans $L^1(\mathbb{R}_+)$) telle que*

$$\sigma \geq 0, \qquad \sigma(m,z) = 0 \ \ pour \ \ m \in [0, \overline{m}_a] \cup [\overline{m}_A, \infty[.$$

Démonstration. Pour la démonstration, voir [8] la proposition 3.1.

□

S'il existe un $t_1 \geq 0$ tel que

$$\overline{\sigma}_1(m,t) = \overline{\sigma}_1^\infty(m) \qquad \forall t \geq t_1,\ m \in \mathbb{R}_+,$$

avec une fonction $\overline{\sigma}_1^\infty(\cdot)$ qui ne depend pas de t, alors la convergence de la solution σ obtenue dans le théorème 2 vers la solution stationnaire avec la condition d'entrée $\overline{\sigma}(m) = \overline{\sigma}_1^\infty(m)$ résulte immédiatement du théorème 1 et du lemme 5.

Pour examiner la convergence pour le cas des conditions plus générales pour $\overline{\sigma}_1$, admettons que $\overline{\sigma}_1(\cdot,t)$ tend vers $\overline{\sigma}_1^\infty(\cdot)$ (dans le sens qu'on va préciser) et considérons la solution stationnaire $\sigma^\infty = \sigma^\infty(m,z)$, qui s'obtient par la proposition 2 avec $\overline{\sigma}(m) = \overline{\sigma}_1^\infty(m)$.

Introduisons en outre les notations

$$\overline{\sigma}_1^t(m,s) = \overline{\sigma}_1(m,t+s), \quad \sigma^t(m,s,z) = \sigma(m,t+s,z) \quad \text{pour } 0 < s < 1.$$

On a alors le résultat suivant.

Proposition 3. *Soient $\overline{\sigma}_0$ et $\overline{\sigma}_1$ comme dans le théorème 2. On suppose en outre que*

$$\overline{\sigma}_1^t \to \overline{\sigma}_1^\infty \quad \textit{pour } t \to \infty \quad \textit{dans } L^\infty(\mathbb{R}_+ \times]0,1[). \tag{6.3}$$

Alors on a

$$\sigma^t \to \sigma^\infty \quad \textit{pour } t \to \infty \quad \textit{dans } L^\infty(\mathbb{R}_+ \times]0,1[\times]0,1[). \tag{6.4}$$

Dans (6.3) *et* (6.4)*, $\overline{\sigma}_1^\infty$ et σ^∞ sont à considérer comme fonctions appartenant à $L^\infty(\mathbb{R}_+ \times]0,1[)$ et $L^\infty(\mathbb{R}_+ \times]0,1[\times]0,1[)$ et indépendantes de $s \in]0,1[$.*

Démonstration. Rappellons d'abord la définition (3.1) de $\tilde{t}$, qui nous donne l'expression de t en fonction de $\tilde{t}$, c'est-à-dire

$$t = t(m,\tilde{t},z) = \tilde{t} - \frac{1-z}{u(m)}. \tag{6.5}$$

Cela étant, de la définition de $D[\omega]$ (voir (5.1)) il résulte immédiatement qu'il existe deux constantes N_1 et N_2 telles que, si on pose

$$\omega^{[t]} = \{(m,\tilde{t}) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \,|\, m \in]\overline{m}_a, \overline{m}_A[,\ \tilde{t} \in [t-N_1, t+N_2]\},$$

on ait

$$\mathbb{R}_+ \times [t,t+1] \times [0,1] \subset \{(m,t',z) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times [0,1] \,|\, t' = t'(m,\tilde{t},z),\ (m,\tilde{t},z) \in D[\omega^{[t]}]\}. \tag{6.6}$$

Comme σ^∞ peut être considérée comme la solution du problème (2.1), (2.8) et (2.9) avec $\overline{\sigma}_1 = \overline{\sigma}_1^\infty$ et $\overline{\sigma}_0 = \sigma^\infty$, en tenant compte que σ^∞ et $\overline{\sigma}_1^\infty$ sont indépendantes de t, en faisant la comparaison de l'équation (2.1) pour σ et celle pour σ^∞, et en les considérant dans les coordonnées $(m, \tilde{t}, z)$ (mais, pour éviter la notation lourde due au changement de variables défini dans (3.1), nous utilisons la même notation pour σ), de la même manière que pour l'inégalité (5.7), on a

$$\|\sigma(\cdot,\cdot,z) - \sigma^\infty(\cdot,\cdot,z)\|_{L^\infty(D_{\omega[t]}(z))} \leq \|\overline{\sigma}_1 - \overline{\sigma}_1^\infty\|_{L^\infty(D_{\omega[t]}(1))} \times \tag{6.7}$$

$$\times \exp\Big(C \int_z^1 (\|\sigma(\cdot,\cdot,z')\|_{L^\infty(D_{\omega[t]}(z'))} + \|\sigma^\infty(\cdot,\cdot,z')\|_{L^\infty(D_{\omega[t]}(z'))}) dz'\Big).$$

Or, de l'hypothèse (6.3) (voir aussi (6.5), (5.4)) il résulte que

$$\|\overline{\sigma}_1 - \overline{\sigma}_1^\infty\|_{L^\infty(D_{\omega[t]}(1))} \to 0 \quad \text{pour } t \to \infty.$$

Donc de (6.7) on déduit que

$$\|\sigma(\cdot,\cdot,z) - \sigma^\infty(\cdot,\cdot,z)\|_{L^\infty(D_{\omega[t]}(z))} \to 0 \quad \text{pour } t \to \infty, \quad 0 \leq z \leq 1,$$

c'est-à-dire, en le traduisant encore dans les coordonnées (m, t, z) (voir (6.5) et (6.6)), on a

$$\sigma^t \to \sigma^\infty \quad \text{pour } t \to \infty \quad \text{dans } L^\infty(\mathbb{R}_+ \times]0,1[\times]0,1[).$$

La proposition est démontrée.

$\square$

Références

[1] Belhireche, H., Aissaoui, M. Z., and Fujita-Yashima, H. Equations monodimensionnelles du mouvement de l'air avec la transition de phase de l'eau. *Sci. Techn. Univ. Constantine-A 31* (2011), 9–17.

[2] Escobedo, M., Mischler, S., and Perthame, B. Gelation in coagulation and fragmentation models. *Comm. Math. Phys. 231* (2002), 157–188.

[3] Escobedo, M., Mischler, S., and Rodriguez-Ricard, M. On self-similarity and stationary problem for fragmentation and coagulation models. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 22* (2005), 99–125.

[4] Escobedo, M., and Velazquez, J. J. L. On the fundamental solution of a linearized homogeneous coagulation equation. *Comm. Math. Phys. 297* (2010), 759–816.

[5] Fujita-Yashima, H., Campana, V., and Aissaoui, M. Z. Système d'équations d'un modèle du mouvement de l'air impliquant la transition de phase de l'eau dans l'atmosphère. *Ann. Math. Afr.*, 2 (2011), 66–92.

[6] Kikoïne, A. K., and Kikoïne, I. K. *Physique moléculaire*. Moscou, 1979. traduit du russe, Mir.

[7] Kolmogorov, A. N., and Fomine, S. V. *Eléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionelle*. Moscou, 1974. traduit du russe, Mir.

[8] Merad, M., Belhireche, H., and Fujita-Yashima, H. Solution stationnaire de l'équation de coagulation de gouttelettes en chute avec le vent horizontal. *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 129* (2013), 225–244.

[9] Mischler, S. Contributions à l'étude mathématique de quelques modèles issus de la physique hors équilibre. *Univ.Versailles Saint-Quentin* (2001). Thèse d'habilitation.

[10] Mischler, S., and Rodriguez-Ricard, M. Existence globale pour l'équation de Smoluchowski continue non homogène et comportement asymptotique des solutions. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I. Math. 336* (2003), 407–412.

[11] Müller, H. Zur allgemeinen Theorie der raschen Koagulation. *Kolloidchem. Beib. 27* (1928), 223–250.

[12] Niethammer, B., and Velazquez, J. J. L. Optimal bounds for self-similar solutions to coagulation equations with multiplicative kernel. A paraître sur Commun. PDE.

[13] Prodi, F., and Battaglia, A. *Meteorologia - Parte II, Microfisica*. Grafica Pucci, Roma, 2004. voir aussi le site : http ://www.meteo.uni-bonn.de/mitarbeiter/battaglia/teaching.html.

[14] Selvaduray, S., and Fujita-Yashima, H. Equazioni del moto dell'aria con la transizione di fase dell'acqua nei tre stati : gassoso, liquido e solido. *Accad. Sci. Torino, Memorie Cl. Sci. Fis., Serie V 35* (2011), 37–69.

[15] Sheng P., X., Mao J., T., Li J., G., Zhang A., C., Sang J., G., and Pan N., X. Physique de l'atmosphère. *Publ. Univ. Pékin* (2003). en chinois.

[16] Smoluchowski, M. Drei Vorträge über Diffusion. *Phys. Zeits. 17* (1916), 557–585. Brownische Bewegung und Koagulation von Kolloidteilchen.

[17] Voloshtchuk, V. M. *Théorie cinétique de coagulation*. Gidrometeoizdat, Leningrad, 1984. en russe.

AMS Subject Classification : 35R09, 35L60

Hanane BELHIRECHE, Mohamed Zine AISSAOUI, Hisao FUJITA YASHIMA
Laboratoire de Mathématiques appliquées et de modélisation,
Université 8 mai 1945, Guelma
24000 Guelma, ALGERIA
e-mail : hanane.belhireche@gmail.com, aissaouizine@gmail.com,
hisao.fujitayashima@unito.it

Hisao FUJITA YASHIMA
also : Dipartimento di Matematica, Università di Torino
10123 Torino, ITALY e-mail : hisao.fujitayashima@unito.it

Lavoro pervenuto in redazione il 28.04.2012