

Estimation du Flux de Production de Chaleur d'une Réaction Chimique

A. Boukrouche

Centre Universitaire 8 Mai 1945, Guelma

(Accepté le 15. 04. 99)

Abstract — *The exploitation of the data obtained with a reaction calorimeter is based on the calculation of the heat production rate using a thermal model of the process. Numerical integration ' which gives an acceptable approximation ' is usually used. However, in this work, a different approach is proposed to determine this quantity. Such an approach is based on signal restoration of heat exchange reactions. Hence, the proposed technique is used for the estimation of time-varying parameters such as the heat reaction rate in a chemical process. The performances of the proposed technique are illustrated through the estimation of the heat reaction rate in a reaction calorimeter.*

Résumé — *Le but de la calorimétrie est mesuré l'énergie dégagée par une réaction chimique. De manière générale, la puissance dégagée par une réaction est calculable à partir de la modélisation dynamique du bilan thermique de l'installation. A partir de la connaissance de cette puissance, on remonte à l'énergie par intégration de la puissance calorifique par rapport au temps. Afin de déterminer cette puissance, l'approche couramment utilisée est le calcul numérique (lissage) permettant une bonne approximation. Dans le travail présenté ici, une approche différente pour la détermination de cette quantité est proposée. En effet, à partir de la modélisation dynamique de l'installation, cette estimation peut être considérée comme une reconstruction du flux de la production de chaleur par la réaction, ce signal étant la puissance dégagée par la réaction. Cette technique est plus connue sous le nom de déconvolution.*

Mots clés- Batch – Calorimétrie – Estimation - Chaleur de réaction.

1 INTRODUCTION

Des données nécessaires à la mise en œuvre d'un procédé chimique peuvent être obtenues dans un calorimètre de réaction. Plusieurs types de calorimètres plus ou moins sophistiqués sont commercialisés, mais ils demeurent prohibitif.

L'objectif de ce travail est de fournir une méthodologie, permettant d'obtenir des informations fiables et utiles sur un procédé à partir d'un simple réacteur pilote calorimétrique de laboratoire. L'approche que nous proposons repose sur le traitement du signal et permet l'estimation de la quantité de chaleur échangée à partir de mesures de température. De ces estimations, nous déduisons les cinétiques de réactions utiles pour l'extrapolation de l'échelle laboratoire à l'échelle industrielle. Cette méthode est appliquée à l'estimation de la chaleur de réaction de l'hydrolyse de l'anhydride acétique. Similaires problèmes sont rencontrés dans les procédés énergétiques particulièrement dans le stockage d'énergie.

La plupart des procédés chimiques sont accompagnés d'effets thermiques. La calorimétrie de réaction permet de mesurer ces effets thermiques. Elle peut être définie comme la mesure d'une énergie à l'aide de capteur de température et d'un bilan thermique.

Le procédé peut être modélisé en utilisant les lois physiques de la *cinétique chimique* et de la *thermodynamique* [1, 2].

2 ETUDE EXPERIMENTALE

Le travail expérimental de cette étude a été réalisé sur un calorimètre pilote construit et instrumenté [3], au LAGEP¹ (figure1).

Le réacteur se compose d'un récipient interne dans lequel on introduit des espèces chimiques (réactifs) et d'une double enveloppe dans laquelle circule un fluide dont on peut réguler la température d'entrée T_{ji} et le débit, et dont le rôle est de modifier par échange thermique la température T_r dans le réacteur. Pour homogénéiser le milieu réactionnel, on dispose d'un agitateur.

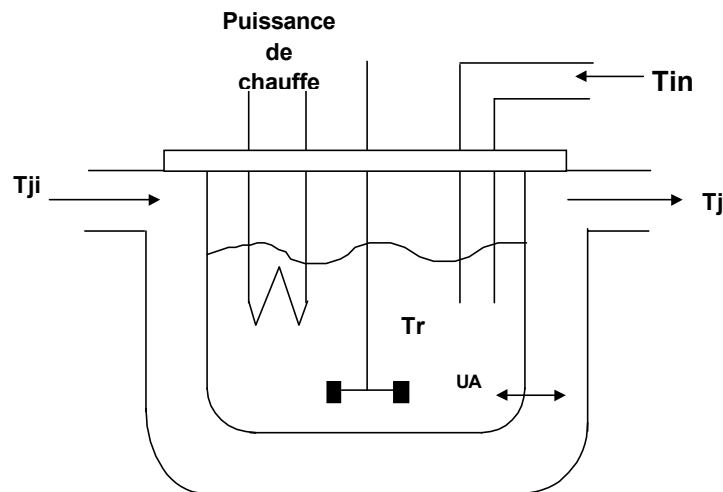


Fig.1 : Schéma du réacteur pilote calorimétrique

Les hypothèses qui ont été utilisées pour la modélisation sont les suivantes:

- Réacteur double enveloppe, parfaitement agité.
- La double enveloppe est elle aussi un réacteur parfaitement agité.
- Phase homogène.
- Volume réactionnel constant
- ¹ Laboratoire d'Automatique et de Génie Procédés
- Les échanges thermiques sont régis par un coefficient global d'échange UA
- Le système n'échange pas de chaleur avec l'extérieur.

Le réacteur pilote calorimétrique a été conçu au laboratoire LAGEP [3]. Cet outil permet l'acquisition de données thermiques de réaction batch ou fed-batch dans des conditions similaires aux réacteurs industriels. Il comprend trois principaux groupes d'appareils:

- le réacteur
- une unité de refroidissement et de chauffage
- une unité de pilotage et de régulation

Le réacteur en verre, de volume utile d'un litre, est muni d'une double-enveloppe de 0.5 litre. Il est équipé :

- d'un capteur de température qui mesure T_r , la température au sein du réacteur ;
- d'une résistance électrique d'étalonnage, insérée dans un tube en verre pour éviter tout contact avec le milieu réactionnel ;
- d'un agitateur en verre à hélice tripale, de type Bateau ;
- d'une vanne de fond ;

d'un condenseur en verre muni d'une double – enveloppe et d'un serpentín intérieur.

¹ Laboratoire d'automatique et de Génie des Procédés

L'unité de régulation comprend deux échangeurs, l'un étant alimenté par de l'eau dont la température varie de 16 à 20 °C, et l'autre par de l'huile silicone provenant d'un réservoir de fluide chaud en boucle fermée sur des résistances de chauffage. Le système de commande de la température du fluide caloporteur repose sur un système d'aiguillage du fluide vers deux échangeurs, réalisé par un ensemble de deux vannes électro - pneumatiques fonctionnant de façon complémentaire et dont la course est limitée.

Les températures T_r , T_j , T_{ji} sont mesurées à l'aide de sondes (PT100) reliées à l'ordinateur via un Convertisseur Analogique Digital de 15 bits, qui permet d'obtenir une résolution de la température de l'ordre de 0.0076°C.

3 MODELISATION

En fonctionnement batch [3], du bilan énergétique du réacteur et de la double enveloppe, on a :

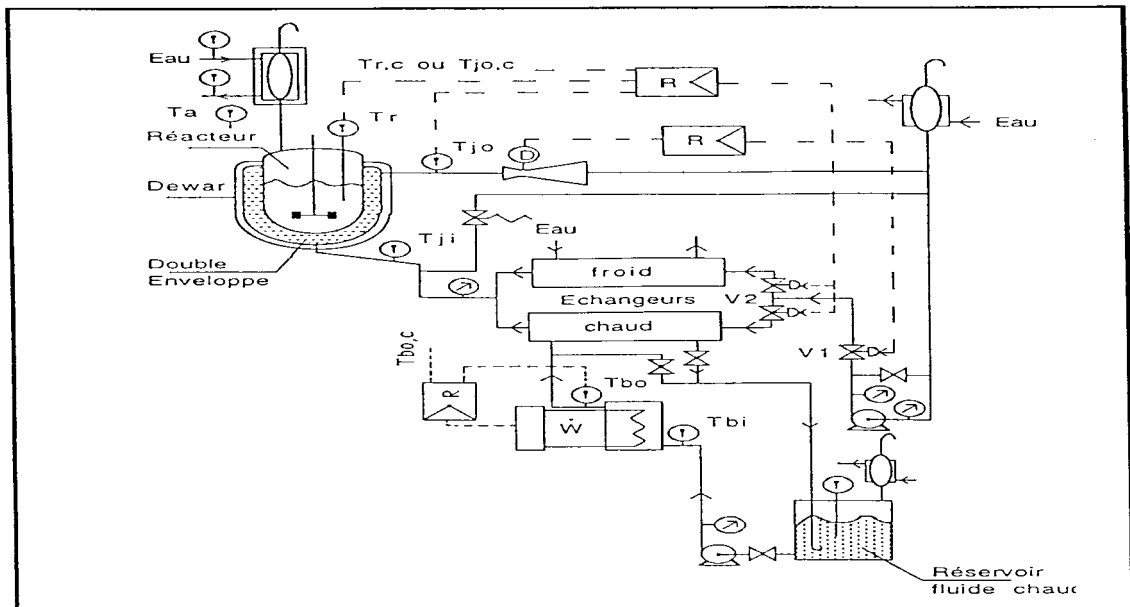


Fig.2 Schéma de principe du système de réaction

Les variations de la température du milieu réactionnel sont décrites par

$$C_r \frac{dT_r}{dt} = UA.(T_j - T_r) + q_r \tag{1}$$

La température du fluide caloporteur satisfait l'équation :

$$\frac{dT_j}{dt} = \frac{D_j}{V_j}(T_{ji} - T_j) + \frac{UA}{\rho_j VC_{j,j}}(T_j - T_r) \tag{2}$$

Il est bien connu que l'estimation de la quantité de chaleur émise lors d'une réaction résulte de l'exploitation d'un bilan thermique instantané. Le procédé étudié est régi par le bilan thermique établi ci-dessous (dont les termes s'expriment en Watts):

$$C_r \frac{dT_r}{dt} = q_r + q_{tf} + q_c + q_{agit} + q_{pertes} + q_{alim} \tag{3}$$

L'exploitation des mesures thermiques permet ensuite d'évaluer la vitesse de la réaction chimique et le taux de conversion, à partir de l'estimation de q_r en fonction du temps.

4 PRINCIPE DE LA DECONVOLUTION

En général, on rencontre très souvent des difficultés lorsque l'on effectue, en pratique, une mesure, dans le but de remonter (estimer) à une grandeur physique que l'on veut évaluer avec précision. Le problème d'estimation peut être considéré comme un problème de déconvolution. En effet, comme le montre la figure 3., l'information obtenue est une version déformée de l'information originelle. Le processus de déformation étant la chaîne de mesure.

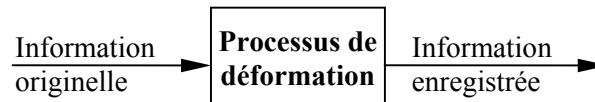


Fig. 3 : Processus de dégradation

Le but de la déconvolution est de restaurer l'entrée inconnue du processus de déformation. Afin que ceci soit possible, il nous faut un modèle qui peut être exprimé par une fonction de transfert dans le domaine de Laplace :

$$Y_m(s) = H(s) \cdot U(s) + V(s)$$

où $H(s)$ représente la fonction de transfert du processus de déformation, $U(s)$ l'entrée inconnue (l'information originelle), $V(s)$ le bruit de mesure et $Y_m(s)$ la sortie mesurée (l'information enregistrée). U est obtenu de l'inversion de la relation précédente.

Or, comme le processus de déformation est un filtre passe-bas, son inverse est un filtre passe-haut. De plus, le bruit de mesure étant un processus haute fréquence, l'inversion directe amplifiera le bruit de mesure. Par conséquent, le résultat obtenu sera très bruité voire même complètement bruité.

On peut trouver dans la littérature des méthodes permettant de résoudre ce problème. Il est souvent proposé une étape de mise en forme du signal enregistré en filtrant ce dernier afin de réduire le niveau des bruits de mesure, se pose alors la question du choix du filtre. En effet, si le filtrage n'est pas adapté, soit certaines informations contenues dans le signal enregistré peuvent être atténuées, soit le filtre ne réduirait que partiellement les bruits de mesures.

Une alternative à ce problème est l'utilisation de la 'méthode de régularisation' [4] qui tend à faire un compromis entre l'adéquation aux mesures et la douceur du signal à estimer.

Les données obtenues étant sujet à un bruit de mesure, nous avons pris le parti d'élaborer une méthode de déconvolution intégrant une étape de filtrage (filtre f et g) dans son algorithme de restauration. Le schéma de principe de la méthode développée est donné en figure 4.

Dans différents domaines scientifiques où les mesures expérimentales sont capitales, les capteurs font l'objet de la plus grande attention. Leurs qualités augmentent avec l'évolution de la technologie, mais l'expérimentateur en veut toujours plus. C'est à dire qu'il veut dépasser les performances offertes par ses capteurs. Dans ce cas, il faut faire appel au traitement du signal afin d'extraire un maximum d'information des signaux enregistrés. Les techniques de 'déconvolution' ont depuis longtemps été utilisées dans ce but.

Considérons le cas d'un capteur, qui a pour rôle de transformer une grandeur physique (représentant une température, une pression, un débit, etc.) en une grandeur électrique (en générale une tension). Compte tenu de ce changement de dimension et de la physique du capteur, il est nécessaire avant toute mise en fonction du système de mesure d'effectuer un étalonnage. Cet étalonnage traduit le lien existant entre la grandeur physique et la grandeur électrique, cette relation est appelée 'fonction d'appareil'. Généralement, celle-ci est

considérée comme une constante. Cependant certains capteurs présentent un comportement dynamique non négligeable.

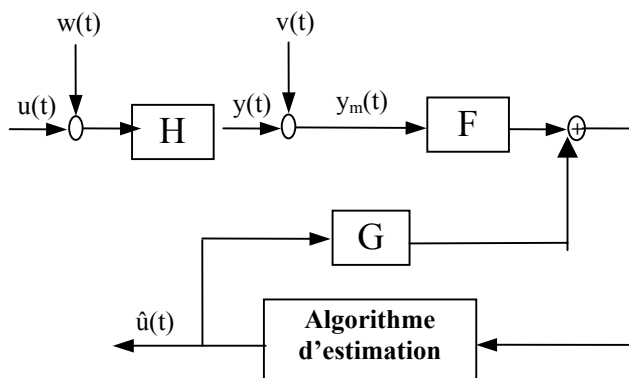


Fig.4 :Schéma de principe de la méthode développée

Le signal qu'on désire reconstituer est q_r , la chaleur dégagée par la réaction chimique. Le système d'équations (1) et (2) se traduit par :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = Ax + B_1 \cdot q_r + B_2 T_{ji} \\ y = C \cdot x \end{cases}$$

où :

$$x = \begin{bmatrix} T_r \\ T_j \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} -\frac{UA}{C_r} & \frac{UA}{C_r} \\ \frac{UA}{\rho_j V_j C_j} & -\left(\frac{D_j}{V_j} + \frac{UA}{\rho_j V_j C_j}\right) \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{C_r} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{D_j}{V_j} \end{bmatrix}$$

et

$$C = [1 \ 0]$$

Dans notre approche, les termes UA et C_r sont évalués par étalonnage.

La détermination de la puissance échangée au sein de la masse réactionnelle se ramène alors à l'estimation de l'entrée d'un système linéaire, c'est à dire à un problème de traitement du signal (déconvolution) ; En considérant le calorimètre complet avec sa régulation comme un système ayant en entrée la chaleur de réaction et comme sortie la température du réacteur ou celle de la double-enveloppe (figure 5)

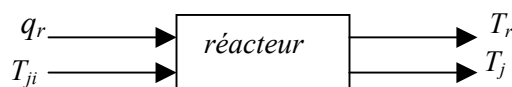


Fig.5 : simulation du réacteur

En effet de la figure 5, on peut écrire :

$$\begin{cases} T_r = k_1 * q_r + k_2 * T_{ji} + v \\ T_r - k_2 * T_{ji} = k_1 * q_r + v \end{cases}$$

Soit K_1 la fonction de transfert de q_r à T_r et K_2 la fonction de transfert de T_{ji} à T_r . où k_1 et k_2 sont respectivement les réponses impulsionnelles des deux fonctions de transfert de q_r à T_r et de T_{ji} à T_r . Avec le signal mesuré $T_s = T_r - k_2 * T_{ji}$ on obtient :

$$T_s = k_1 * q_r + v \tag{3}$$

L'équation précédente est bien connue comme une équation de convolution. Notre but est d'estimer q_r à partir de la connaissance de T_s , K_1 et diverses informations connues sur l'erreur de mesure v .

Si on considère qu'il y a un bruit n ajoutait au signal d'entrée q_r . Il résulte la configuration de la figure 6

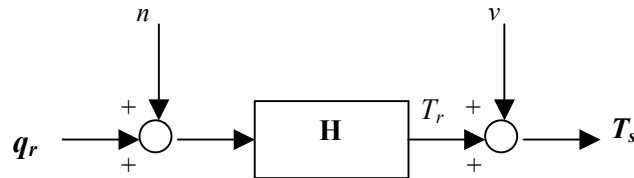


Fig.6 : procédure de convolution

N est le bruit d'entrée gaussien de variance σ_1 et v est le bruit de sortie gaussien de variance σ_2

Nous avons

$$T_s = T_r + v$$

avec $T_r = h * [q_r + n]$

On suppose que le système de mesure est connu par sa fonction de transfert H . La déconvolution consiste à estimer l'information originelle q_r à partir de T_s et diverses informations sur le système de mesure. Il est bien connu que les méthodes itératives de restauration telle que Van Cittert ou Singh [5, 6] sont très sensibles aux bruits de mesure; quand le nombre d'itération augmente. L'effet du bruit devient dominant et le signal restauré se dégrade. Dans le but de remédier à cet inconvénient nous avons développé la méthode schématisée en figure 7.

La plupart des procédures de déconvolution se font en deux étapes, une étape de filtrage utilisée pour réduire le bruit de mesure sur le signal enregistré et ensuite une technique de déconvolution pour restaurer le signal originel. La technique développée dans cette partie intègre le filtrage optimal dans l'algorithme de déconvolution. Ce qui conduit à la configuration de la figure 7 :

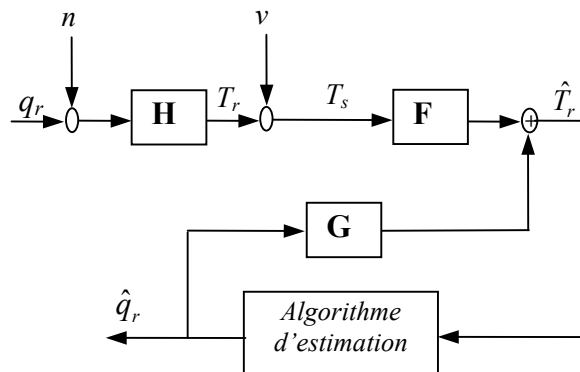


Fig.7 :Schéma de principe de la méthode développée

L'idée est la suivante : «On désire reconstituer q_r . On a pour cela à notre disposition le signal de mesure T_s et le modèle d'état ainsi que les statistiques sur les bruits n et v . On a donc toutes les données nécessaires pour construire un filtre qui nous donnera une estimée filtrée de T_r . Le problème étant que nous ne connaissons pas l'entrée q_r incontournable pour effectuer l'estimation. On dispose donc d'un modèle et du filtre, ces deux systèmes pour une même entrée donnent une même sortie (au bruit d'estimation près). Dès lors, le signal q_r que nous cherchons, est celui qui minimisera l'écart entre la sortie du modèle et celle du filtre. Ce signal est déterminé par une loi de commande optimale et constitue l'estimation de notre signal d'entrée. »

5 APPLICATION

On applique la méthode décrite ci dessus pour estimer la chaleur de réaction $q_r(t)$ dégagée par une réaction chimique (l'hydrolyse de l'anhydride acétique) en calorimétrie à partir de mesures des températures T_r et T_{ji} . Nous comparons le résultat avec $q_r(t)$ obtenue par intégration numérique.

5.1 Détermination de UA et C_r

Nous rappelons avant tout que le C_r calculé ici correspond à la somme des capacités calorifiques des constituants de la masse réactionnelle C_{pr} (multipliées par leur masse respective m) et celle de la paroi et des inserts du réacteur Γ_i :

$$C_r = mC_{pr} + \Gamma_i$$

La détermination de ces deux paramètres (UA et C_r) du bilan thermique, nécessite un étalonnage avant et après réaction.

Au cours de cette manipulation préliminaire, le réacteur est rempli d'une quantité d'eau distillée de masse égale à 1004.7g. La température à l'intérieur du réacteur T_r est notée, ensuite on fait dissiper une quantité de chaleur (UI) dans le réacteur à l'aide d'une résistance électrique. La variation de la température est enregistrée en fonction du temps, jusqu'à stabilisation de T_r .

Le bilan thermique est exprimé par l'équation suivante : $C_r \frac{dT_r}{dt} + UA[T_r - T_j] = UI$

En effet, la dérivée dT_r/dt est nulle en régime permanent, d'où (k variant du début à la fin de l'échantillonnage): $UA = \frac{\sum(UI)k}{\sum[T_r(k) - T_j(k)]}$

Fig.5 Puissance électrique utilisée

La rampe de température permet d'évaluer ensuite C_r , sans réaction chimique et connaissant UA :

$$C_r \frac{(T_{r2} - T_{r1})}{\Delta t} = UI \quad \text{et} \quad C_r = \frac{\sum[(UI)k] \Delta t}{\sum[T_{r2}(k) - T_{r1}(k)]}$$

Le calcul de UA et C_r a donné les valeurs moyennes suivantes indiquées dans le tableau 1

Tableau 1: Détermination des paramètres du bilan thermique

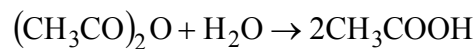
Paramètres thermique	Avant la réaction	Après la réaction
$UA(W/K)$	5.8	6
$C_r (J/K)$	5150	5000

De la même manière l'étalonnage après avoir effectué la réaction chimique a permis de réévaluer les paramètres UA et C_r . Les résultats, donnés dans le tableau 1, montre que ces paramètres ne sont pas affectés par la réaction.

5.2 Estimation de la chaleur dégagée par l'hydrolyse de l'anhydride acétique

Les termes UA et C_r ayant été déterminés, on a alors appliqué la méthode proposée pour reconstruire la chaleur dégagée $q_r(t)$ pour une réaction chimique exothermique, l'hydrolyse de l'anhydride acétique, à partir de l'enregistrement des température (figure 8) avec les valeurs de UA et C_r précédemment obtenues.

L'hydrolyse de l'anhydride acétique se déroule en milieu aqueux acidifié. La réaction chimique s'écrit :



La réaction a été effectuée dans le réacteur expérimental pilote.

Nous appliquons maintenant cette méthode de déconvolution pour estimer la chaleur dégagée par cette réaction $q_r(t)$, à partir du signal pseudo température T_s (voir équation

(2)). On compare le résultat obtenu à celui évalué par intégration numérique après avoir filtré les mesures de températures (figure9) pour réduire le bruit de mesure. Les résultats sont présentés sur les figures 10 et 11.

Fig. 8: Profils des températures T_r et T_{ji}

Fig. 9: signal enregistré T_s

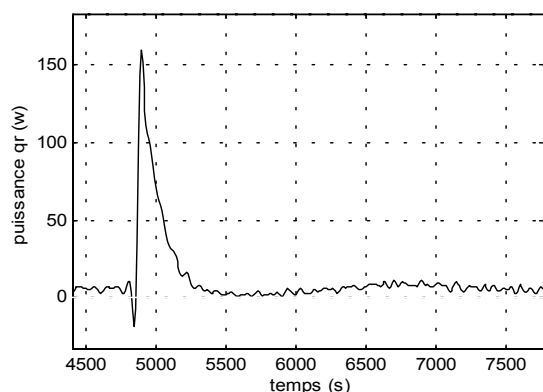


Fig.10: Estimation de la chaleur de réaction $q_r(t)$ par la technique proposée

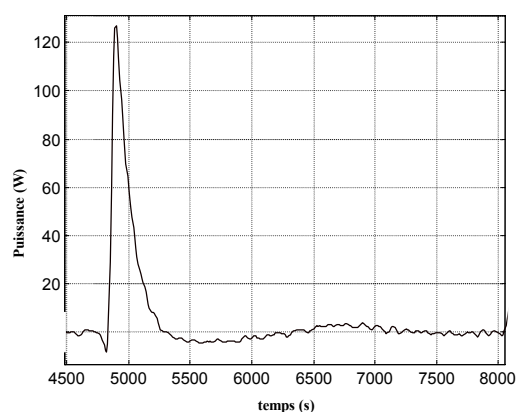


Fig.11 Estimation de la chaleur de réaction $q_r(t)$ par intégration numérique et filtrage avec le filter Butterword

Le lissage donne un signal d'énergie 256.0 kJ alors que la déconvolution donne une énergie de 257.2 kJ. A la lecture de ces résultats numériques, on ne peut pas dire que l'apport soit frappant. Par contre la confrontation des résultats graphiques nous montre que le pic initial est bien mieux résolu avec la déconvolution. Bien sur, un tel résultat pourrait également être obtenu par lissage mais il faudrait alors ajuster l'ordre du filtre et la fréquence de coupure d'où 2 paramètres de réglage alors que notre approche ne nécessite qu'un seul paramètre de réglage.

Le calcul par la méthode de déconvolution a permis d'obtenir une enthalpie égale à $\Delta H_r = 55.52 \text{ kJ.mole}^{-1}$. Cette enthalpie est en parfait accord avec l'enthalpie de réaction déterminée théoriquement à partir des données thermodynamiques [7], qui est de $\Delta H_r = 7.59 \text{ kJ.mole}^{-1}$.

6 CONCLUSION

Nous avons utilisé une technique de reconstruction du signal dans le but d'estimer la quantité de chaleur dégagée par une réaction chimique, à partir de mesures de températures dans un prototype, qui ne peut se comparer en l'état avec les calorimètres de réaction commercialisés, en particulier au niveau de la convivialité et de la dynamique de régulation. Cette étude a démontré l'apport d'une méthode de déconvolution pour reconstruire le thermogramme d'une réaction rapide.

NOMENCLATURE

C_r : capacité calorifique du milieu réactionnel et de ses inserts
 T_r : Température du milieu réactionnel
 T_j : Température à la sortie de la double-enveloppe
 T_{ji} : température à l'entrée de la double-enveloppe
 U : Coefficient global d'échange thermique
 A : surface d'échange thermique avec la double-enveloppe

q_r : puissance émise ou absorbée au sein de la masse réactionnelle
 q_{tf} : puissance échangée à travers la double enveloppe
 q_c : puissance électrique dissipée par compensation ou étalonnage
 q_{agit} : puissance dissipée par l'agitateur
 q_{pertes} : puissance dissipée vers l'environnement
 q_{alim} : puissance thermique due à une

ρ_j : masse volumique du fluide caloporteur	alimentation en réactif de
V_j : volume de fluide caloporteur dans la double- enveloppe	température quelconque
C_j : capacité calorifique massique du fluide caloporteur	H : transformée de Fourier de h ,
D_j : Débit de fluide caloporteur dans la double- enveloppe	h : réponse impulsionnelle
	T_{in} : Température d'injection du réactif coulé
	q_r : chaleur (puissance) dégagée par la réaction

REFERENCE

- [1] B. Frémaux, "*Eléments de Cinétique et de Catalyse*", Technique et documentation, Lavoisier 1989.
- [2] C. G. Hill, "*An introduction to Chemical Engineering Kinetics and Reactor Design*", John Wiley and Sons, New York, 1977.
- [3]- K. Fiaty, "*Conception, Réalisation et Automatisation d'un Réacteur Pilote de Laboratoire pour Identification de Cinétiques et de Thermicités*". Thèse de l'université Claude Bernard Lyon1, 1991.
- [4] A. N. Tikhonov et V. Y. Arsenin, "*Solution of Ill-posed Problems*". New York :Halsted, 1977.
- [5] S. Singh et S.N. Tandon, "*An Iterative Restoration Technique*", Signal Processing 11 (1986)1-11.
- [6] P.H. Van Cittert, "*Zum Ein Flub der Spaltbreite auf die Intensitaet-Werteilong in Spectrallinien*", Z. Furphys 69(1931)298-308.
- [7] CRC Press, "*Handbook of Chemistry and Physics*", Ist student edition.
- [8] V. Badeva et V. Morozov "*Problèmes Incorrectement Posés, Théory et Applications*", ed MASSON, 1991.

ANNEXE : Description de la Méthode

Le problème consiste à déterminer le signal d'entrée q_r à partir de T_s et diverses informations connues sur le système.

On recherche une estimation \hat{T}_r de T_r telle que $E\{(T_r - \hat{T}_r)^2\}$ soit minimum. T_r est défini par :

$$T_r = f * T_s + g * q_r \quad (\text{A.1})$$

où f et g sont deux filtres à déterminer.

Nous montrons que :

$$\begin{cases} F = \frac{|H|^2}{|H|^2 + \frac{\gamma_v}{\gamma_n}} \\ G = H(1 - F) \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

où γ_n et γ_v sont les densités spectrales des signaux n et v respectivement, F , G les transformées de Fourier de f , et g .

l'équation (A.1) devient :

$$\hat{T}_r = f * [T_s - h * q_r] + h * q_r \quad \text{ou} \quad \hat{T}_r - h * q_r = f * T_s - f * h * q_r \quad (\text{A.3})$$

A présent, le problème est de chercher la valeur optimale du signal d'entrée q_r .
 \hat{T}_r étant la meilleure estimée de T_r au sens de l'erreur quadratique moyenne.

On a:

$$\|\hat{T}_r - h * q_r\|_2^2 \leq \|T_s - h * q_r\|_2^2 \quad (\text{A.4})$$

comme $T_s - h * q_r = T_s - T_r + T_r - h * q_r = v + h * n$ alors

$$\|\hat{T}_r - h * q_r\|_2^2 \leq \|v + h * n\|_2^2 = \varepsilon^2 \quad (\text{A.5})$$

avec (A.3) et (A.5) on obtient :

$$\|f * T_s - f * h * q_r\|_2^2 \leq \varepsilon^2$$

on propose de déterminer q_r tel que :

$$\begin{aligned} \|f * T_s - f * h * q_r\|_2^2 &\leq \varepsilon^2 \\ \|q_r\|_2^2 &\leq \beta^2 \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

où β est une constante prédéfinie.. Ceci peut être obtenu par la minimisation de

$$J = \|f * T_s - f * h * q_r\|_2^2 + \alpha \|q_r\|_2^2$$

avec $\alpha = (\frac{\varepsilon}{\beta})^2$

la solution optimale $\hat{q}_{r\alpha}$ est donnée [8] par :

$$(\alpha + (f * h)^* * (f * h)) * q_{r\alpha} = (f * h)^* * f * T_s$$

$(f * h)^*$ étant le conjugué de $(f * h)$

Dans le domaine de Fourier , on écrit :

$$(\alpha + (F.H)^* .(F.H)).\hat{Q}_{r\alpha} = (F.H)^* .F.T_s \quad (\text{A.7})$$

F , T_s et $\hat{Q}_{r\alpha}$ sont les transformées de Fourier de f , T_s et $\hat{q}_{r\alpha}$ respectivement, et $(F.H)^*$ désigne le conjugué de $(F.H)$

Alors nous devons obtenir un signal $\hat{Q}_{r\alpha}$ tel que

$$Y_a = R_\alpha \hat{Q}_{r\alpha} \quad (\text{A.8})$$

avec
$$\begin{cases} Y_a = (F.H)^* .F.T_s \\ \alpha + (F.H)^* .(F.H) \end{cases}$$

Pour résoudre (A.8), représentant une forme bien connue, on utilise une méthode itérative quelconque [5, 6].