

ALCUL DYNAMIQUE DE LA POUTRE DEFORMABLE REPOSANT SUR MILIEU ÉLASTIQUE DE PROPRIÉTÉS DISTRIBUTIVES

Salah Guenfoud, Nouredine Ouelaa, Mohamed Chérif Dajamaa, Abderrazek Djebala

Université 08 mai 1945 Guelma
Laboratoire de Mécanique & Structures
B.P. 401 Guelma 24000
e-mail znaio@yahoo.fr

Résumé :

Les problèmes de contact comme le cas des poutres et plaques reposant sur milieux élastiques nécessitent des études dynamiques bien précises vu leur exposition aux vibrations. Ce problème a été examiné sérieusement dès la fin du XIX siècle et toutes les études faites dans ce domaine sont basées sur les méthodes numériques vu les difficultés mathématiques liées à ce problème et souvent donnent des résultats non précis. C'est pourquoi, le besoin d'améliorer les méthodes de calcul existantes de telles structures ou de proposer de nouvelles méthodes plus efficaces s'impose. Dans ce contexte, on présente dans ce travail une approche semi-analytique permettant le calcul des poutres reposant sur sol élastique en dynamique. L'étude faite comporte la détermination des fréquences et formes propres de la poutre reposant sur milieu élastique de type de Boussinesq, ainsi que sa réponse à l'action des charges dynamiques extérieures.

Mots-clefs : poutre, milieu élastique, dynamique, problème de contact

Abstract :

The problems of contact like the case of the beams and plates resting on an elastic solid require precise dynamic studies regarding their exposure to the vibrations. This problem was examined seriously since the XIX century and all the studies made in this field are based on the numerical methods considering the mathematical difficulties related to this problem and often give no precise results. This is why, the need to improve the existing calculation methods of this structures or to propose new methods more effective is essential. In this context, we present in this work a semi-analytical approach allowing the calculation of the beams resting on an elastic ground in dynamics. The made study comprises the determination of the frequencies and eigen modes of the beam resting on an elastic solid of the type of Boussinesq, like its response to the action of the external dynamical load.

Key-words : beam, elastic solid, dynamic, problem of contact

1. Introduction

L'étude de la dynamique des poutres et plaques reposant sur milieux élastiques a une importante signification dans la conception et le calcul des constructions modernes. Ce problème intéressa beaucoup de spécialistes du domaine Gemochkin *et al.* (1962), Gourbonov-Posadov *et al.* (1984), Timoshenko *et al.* (1959)... et puisque il est lié aux grandes difficultés mathématiques, l'arrivée à l'élaboration d'une méthode de calcul précise et universelle n'est pas atteinte à nos jours. Le problème se complique encore lors de la prise en compte de tous les facteurs entrant dans les calculs, c'est pourquoi des simplifications et des négligences de certains facteurs sont inévitable à ce jour. L'objectif du travail est de présenter une approche basant sur la méthode de Gemochkin *et al.* (1962) permettant le calcul des poutres et plaques reposant sur milieux élastiques de n'importe quelle forme en dynamique. L'inertie du milieu élastique, les forces de frottement dans la zone de contact et l'amortissement de la structure ne sont pas pris en compte. Le problème posé est de déterminer les fréquences et modes propres de la poutre reposant sur milieu élastique de propriétés distributives, ainsi que sa réponse à l'action des excitations extérieures.

2. Formulation de l'approche

Soit une poutre déformable de masse M et de rigidité EI reposant sur semi-infini élastique, (figure 1), caractérisé par le module d'élasticité E_0 et le coefficient Poisson ν_0 .

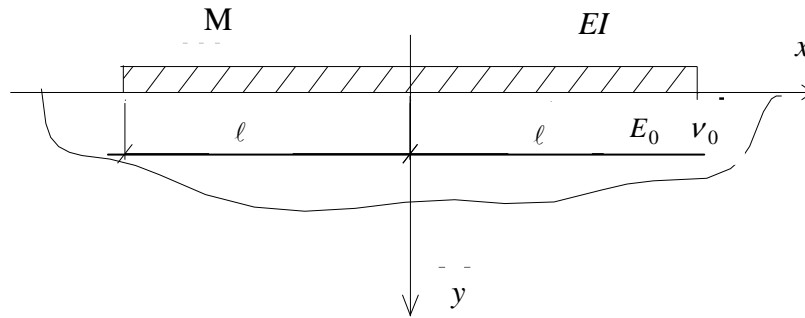


Figure 1. Poutre reposant sur semi infini élastique.

Divisons la poutre en un nombre d'éléments identiques n de longueur c et au centre de chaque élément on met une liaison rigide à travers laquelle se réalise le contact de la poutre avec le semi-infini élastique. C'est à dire le contact continu de la poutre avec le milieu élastique est remplacé par un contact partiel au niveau des liaisons. Admettons que la masse de chaque élément est concentrée en son centre (figure 2).

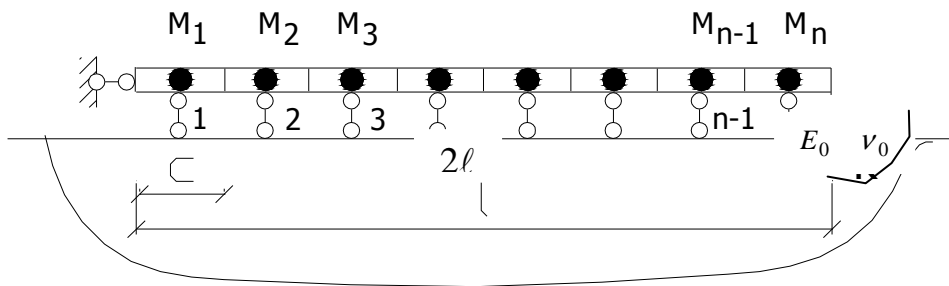


Figure 2. Poutre reposant sur semi infini élastique discrétisée en un nombre d'éléments.

Le principe de la méthode de Gemochkin est illustré sur figre 3. En outre, les forces d'inertie $J_i(t)$ vibrant les masses sont appliquées uniquement sur la poutre puisque la masse du semi-infini élastique n'est pas tenue en compte, tant que les efforts de liaisons $X_i(t)$ sont appliqués sur la poutre et sur le semi-infini élastique.

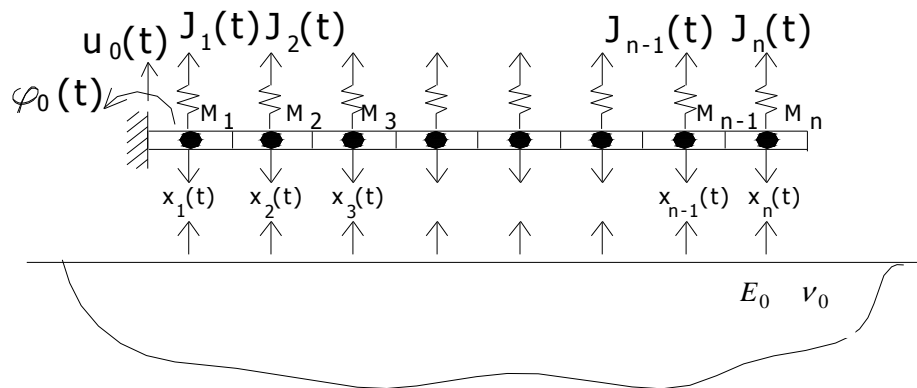


Figure 3. Discrétisation du système poutre-semi infini élastique.

Le système d'équations canoniques permettant l'étude des vibrations de la poutre reposant sur semi-infini élastique est Bosakov (2002), Bosakov *et al.* (2005) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^n (v_{1k} + y_{1k})X_k(t) - \sum_{k=1}^n y_{1k}J_k(t) + \frac{c}{2}\varphi_0(t) + u_0(t) + \Delta_{1p} = 0; \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^n (v_{ik} + y_{ik})X_k(t) - \sum_{k=1}^n y_{ik}J_k(t) + 3\frac{c}{2}\varphi_0(t) + u_0(t) + \Delta_{ip} = 0; \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^n (v_{nk} + y_{nk})X_k(t) - \sum_{k=1}^n y_{nk}J_k(t) + \frac{2n-1}{2}\varphi_0(t) + u_0(t) + \Delta_{np} = 0; \\ \sum_{k=1}^n [X_k(t) - J_k(t)]\frac{2k-1}{2}c = I_y \ddot{\varphi}_0(t); \\ \sum_{k=1}^n [X_k(t) - J_k(t)] = M\ddot{u}_0(t). \end{array} \right. \quad (1)$$

Où v_{ik} : le déplacement vertical de la surface du semi-infini élastique au point i du à la force unitaire $R_k = 1$ appliquée au point k de la même surface;

y_{ik} : la déflexion de la poutre au point i due à la force unitaire $R_k = 1$ appliquée au point k de la poutre;

$X_k(t)$: l'effort de liaison appliqué sur la poutre et sur le semi-infini élastique (inconnue);

$J_k(t)$: la force d'inertie appliquée uniquement sur la poutre;

c : la distance entre les centres de gravité des éléments, supposée constante;

$\varphi_0(t), u_0(t)$: l'angle de rotation et le déplacement vertical initial de la poutre au niveau de l'encastrement (inconnues);

Δ_{ip} : fonction caractérisant les déflexions de la poutre dues aux charges extérieures P ;

M : la masse totale de la poutre;

I_y : le moment d'inertie de la poutre par rapport à l'axe y ;

$$\ddot{\varphi}_0(t) = \frac{d^2\varphi_0}{dt^2}; \quad \ddot{u}_0(t) = \frac{d^2u_0}{dt^2}.$$

La vibration libre de la poutre est supposée sous forme harmonique, alors on peut écrire:

$$\left\{ \begin{array}{l} X_k(t) = X_k e^{i\omega t}; \quad \varphi_0(t) = \varphi_0 e^{i\omega t}; \quad u_0(t) = u_0 e^{i\omega t}; \\ v_k(t) = v_k e^{i\omega t}; \quad J_k(t) = J_k e^{i\omega t}. \end{array} \right. \quad (2)$$

Reportons (2) dans le système (1), dans ce cas $\Delta_{ip} = 0$ puisque il s'agit de la vibration libre de la poutre, on obtient:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^n (v_{ik} + y_{ik})X_k - \sum_{k=1}^n y_{ik}J_k + \frac{2i-1}{2}c\varphi_0 + u_0 = 0, \quad i = 1, \dots, n \\ \sum_{k=1}^n [X_k - J_k]\frac{2k-1}{2}c = I_y \ddot{\varphi}_0 \\ \sum_{k=1}^n [X_k - J_k] = M\ddot{u}_0. \end{array} \right. \quad (3)$$

Si le milieu élastique est considéré comme étant semi-infini élastique (principe de Boussinesq), alors l'expression de v_{ik} prend la forme suivante Galin (1976) :

$$v_{ik} = \frac{1-\nu_0^2}{\pi E_0} \frac{1}{\Omega} \int_{-c/2}^{c/2} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}}. \quad (4)$$

Avec $\Omega = bc$, c et b : longueur et largeur de l'élément respectivement.

Après intégration, l'expression (4) devient:

$$v_{ik} = \frac{1-\nu_0^2}{\pi E_0} \frac{1}{c} F_{ik}, \quad (5)$$

Avec:

$$F_{ik} = 2^* \left\{ \frac{b-2y}{b} \ln \frac{-c+2x+\sqrt{(c-2x)^2+(b-2y)^2}}{2x+\sqrt{4x^2+(b-2y)^2}} + \frac{c-2x}{b} \ln \frac{\frac{1}{2}(-b+\sqrt{(c-2x)^2+(b-2y)^2}+2y)}{y+\sqrt{y^2+\left(\frac{-c}{2}+x\right)^2}} + \frac{2x}{b} \ln \frac{-b+\sqrt{4x^2+(b-2y)^2}+2y}{2\left(y+\sqrt{x^2+y^2}\right)} + \frac{2y}{b} \ln \frac{\frac{-c}{2}+x+\sqrt{\left(\frac{-c}{2}+x\right)^2+y^2}}{x+\sqrt{x^2+y^2}} \right\};$$

La force d'inertie J_k est donnée par l'expression suivante:

$$J_k = -M_k \frac{d^2 y_k(t)}{dt^2} = -M_k \frac{d^2 v_k(t)}{dt^2} = M_k \omega^2 v_k, \text{ puisque } y_k \equiv v_k;$$

Le déplacement global au point k est donné par l'expression suivante Bosakov (2002) :

$$v_k = \frac{1-\nu_0^2}{\pi E_0 c} \sum_{i=1}^n X_i F_{ik}. \quad (6)$$

Tenons compte de toutes ces expressions, le système (3) prend la forme matricielle suivante:

$$\begin{bmatrix} \kappa_{11} & \cdots & \kappa_{1n} & \ell_1 \lambda & \lambda \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \kappa_{n1} & \cdots & \kappa_{nn} & \ell_n \lambda & \lambda \\ \kappa_{n+1,1} & \cdots & \kappa_{n+1,n} & 33Mc^2\omega^2/4 & 0 \\ \kappa_{n+2,1} & \cdots & \kappa_{n+2,n} & 0 & M\omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \\ \varphi_0 \\ u_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (7)$$

$$\text{avec } \lambda = \frac{\pi E_0 c}{1-\nu_0^2};$$

ℓ_i bras de levier des masses par rapport au point d'encastrement (figure 4);

κ_{ij} termes issus des transformations mathématiques après introduction des différentes expressions dans le système (3).

3. Application numérique

Considérons une poutre de rigidité finie $EI = 945000 \text{ kgm}^2$, de longueur $2\ell = 4m$, de largeur $b = 0.2m$ reposant sur semi-infini élastique de module d'élasticité $E_0 = 7 \times 10^6 \text{ kg/m}^2$ et de coefficient de Poisson $\nu_0 = 1/3$. La poutre est discrétisée en 10 éléments identiques de longueur $c = \ell/5$ et de masse $M_i = 150 \text{ kg}$.

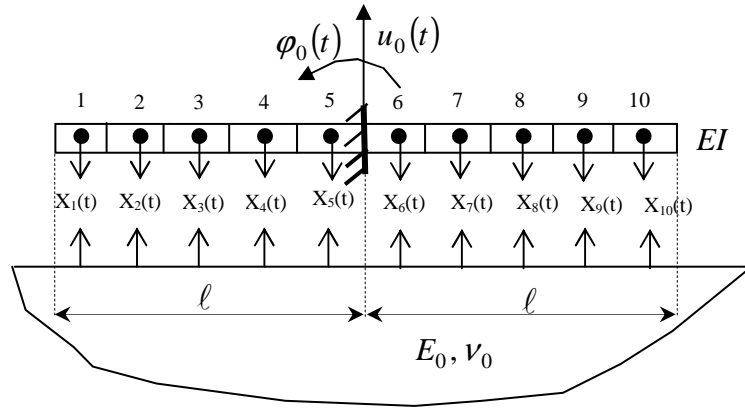


Figure 4. Poutre discrétisée en 10 éléments identiques reposant sur semi-infini élastique. Les déflexions y_{ik} de la poutre dues aux charges unitaires $R_k = 1$ se déterminent par la multiplication des épures des moments. Après calcul on trouve:

$$\frac{c^3}{EI} \begin{bmatrix} y_{11} = \frac{243}{8} & y_{12} = \frac{245}{12} & y_{13} = \frac{275}{24} & y_{14} = \frac{9}{2} & y_{15} = \frac{13}{24} & y_{16} = 0 & y_{17} = 0 & y_{18} = 0 & y_{19} = 0 & y_{110} = 0 \\ & y_{22} = \frac{343}{24} & y_{23} = \frac{25}{3} & y_{24} = \frac{27}{8} & y_{25} = \frac{5}{12} & y_{26} = 0 & y_{27} = 0 & y_{28} = 0 & y_{29} = 0 & y_{210} = 0 \\ & & y_{33} = \frac{125}{24} & y_{34} = \frac{9}{4} & y_{35} = \frac{7}{24} & y_{36} = 0 & y_{37} = 0 & y_{38} = 0 & y_{39} = 0 & y_{310} = 0 \\ & & & y_{44} = \frac{9}{8} & y_{45} = \frac{1}{6} & y_{46} = 0 & y_{47} = 0 & y_{48} = 0 & y_{49} = 0 & y_{410} = 0 \\ & & & & y_{55} = \frac{1}{24} & y_{56} = 0 & y_{57} = 0 & y_{58} = 0 & y_{59} = 0 & y_{510} = 0 \\ & & & & & y_{66} = y_{55} & y_{67} = y_{45} & y_{68} = y_{35} & y_{69} = y_{25} & y_{610} = y_{15} \\ & & & & & & y_{77} = y_{44} & y_{78} = y_{34} & y_{79} = y_{24} & y_{710} = y_{14} \\ & & & & & & & y_{88} = y_{33} & y_{89} = y_{23} & y_{810} = y_{13} \\ & & & & & & & & y_{99} = y_{22} & y_{910} = y_{12} \\ & & & & & & & & & y_{1010} = y_{11} \end{bmatrix} \quad (8)$$

Symétrie

Les termes du second membre des deux dernière équations du système (3) sont obtenus par:

$$I_y \ddot{\varphi}_0 = -2 \left[M_1 \cdot \left(-\frac{9c}{2} \right)^2 + M_2 \left(-\frac{7c}{2} \right)^2 + M_3 \left(-\frac{5c}{2} \right)^2 + M_4 \left(-\frac{3c}{2} \right)^2 + M_5 \left(-\frac{c}{2} \right)^2 \right] \varphi_0 \omega^2 e^{i\alpha} = -\frac{33}{4} M c^2 \omega^2 \varphi_0 e^{i\alpha};$$

$$M \ddot{u}_0 = -M \times \omega^2 u_0 e^{i\alpha}.$$

Le calcul de F_{ik} donne les valeurs suivantes:

$$F_{11} = 4.812; F_{12} = 1.081; F_{13} = 0.509; F_{14} = 0.336; F_{15} = 0.251; F_{16} = 0.200; F_{17} = 0.167; F_{18} = 0.143; F_{19} = 0.125; F_{110} = 0.111.$$

Pour le reste des F_{ik} , $i = 2, \dots, 10$ et $k = 1, \dots, 10$, on a:

si $|i-k|=0$, alors $F_{ik} = F_{11}$; si $|i-k|=1$, alors $F_{ik} = F_{12}$; si $|i-k|=2$, alors $F_{ik} = F_{13}$; si $|i-k|=3$, alors $F_{ik} = F_{14}$; si $|i-k|=4$, alors $F_{ik} = F_{15}$; si $|i-k|=5$, alors $F_{ik} = F_{16}$; si $|i-k|=6$, alors $F_{ik} = F_{17}$; si $|i-k|=7$, alors $F_{ik} = F_{18}$; si $|i-k|=8$, alors $F_{ik} = F_{19}$; si $|i-k|=9$, alors $F_{ik} = F_{110}$.

Les fréquences propres de la poutre reposant sur semi-infini élastique sont obtenues par la résolution de l'équation caractéristique du déterminant de la matrice $[A]$ du système (7). En utilisant le logiciel «Mathematica», on obtient:

$$\omega_1 = 66.86, \omega_2 = 83.12, \omega_3 = 178.97, \omega_4 = 183.30, \omega_5 = 492.25, \omega_6 = 516.53, \omega_7 = 1304.00, \omega_8 = 1337.48, \omega_9 = 2511.58, \omega_{10} = 2543.14, \omega_{11} = 4399.98, \omega_{12} = 4613.13.$$

Ces valeurs sont données en (rd/s). La résolution du système d'équations (7) pour chacune des fréquences propres permet d'obtenir les forces d'interaction poutre-semi infini élastique et par conséquent les déformées propres correspondantes sont obtenues par l'expression (6).

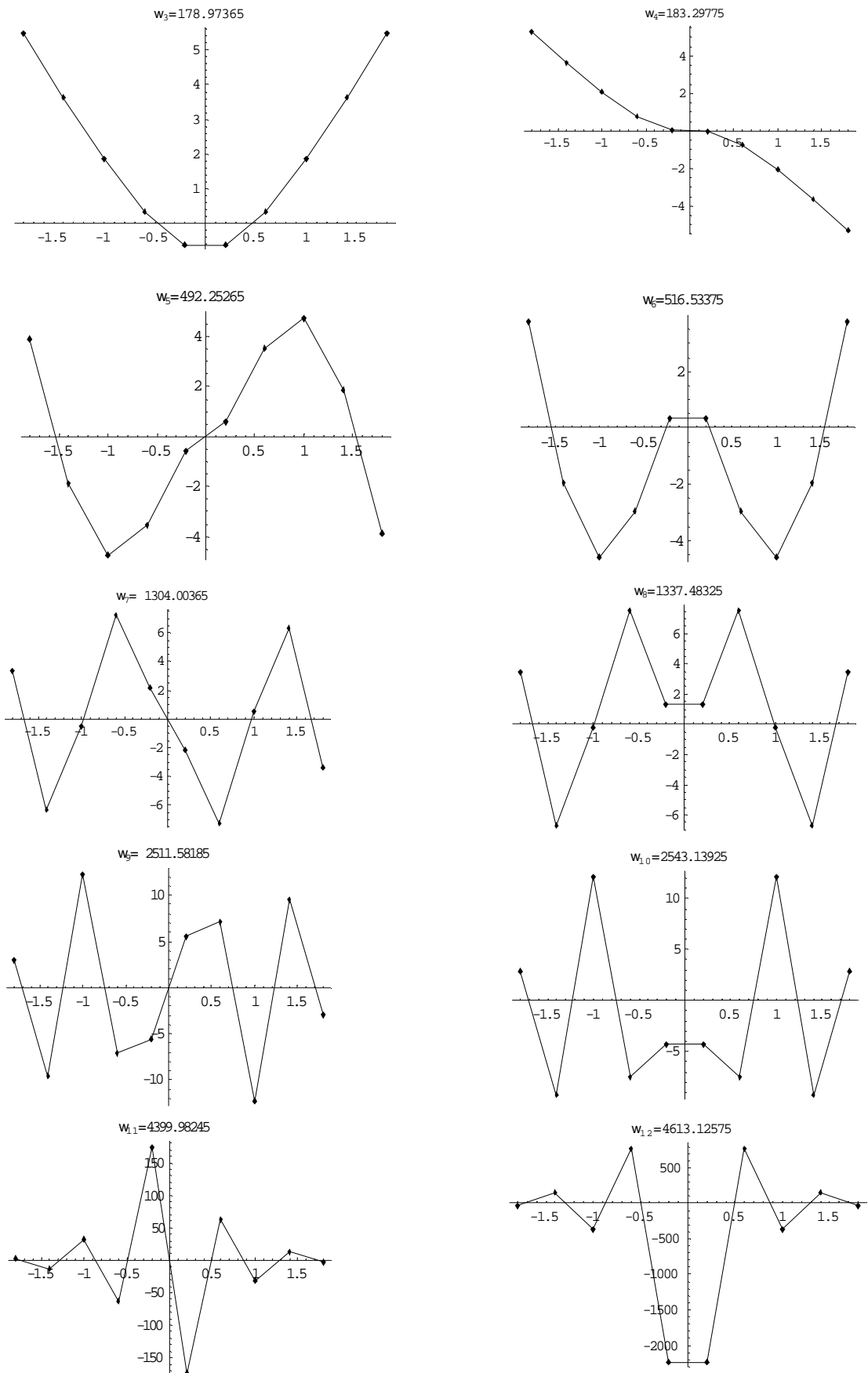


Figure 5. Modes propres de la poutre reposant sur semi-infini élastique.

A noter que les deux premiers modes propres relatifs aux fréquences propres ω_1 et ω_2 représentent les phénomènes du pompage et du tangage de la poutre, c'est pourquoi ils ne sont pas illustrés sur figure 5.

Examinons maintenant la réponse de la poutre due à des charges dynamiques extérieures. Pour ce faire, nous étudions deux cas de charges:

Cas I. Deux charges harmoniques de même type excitant la poutre à la même fréquence, l'une appliquée au point 3 et l'autre au point 8. Les deux charges sont exprimées par:

$$P_3 = P_8 = P_0 \cos(2 \times \pi \times f \times t), \tag{9}$$

où P_0 : l'amplitude de l'excitation (N);

f : la fréquence de l'excitation (Hz);

t : le temps d'excitation (s).

La réponse de la poutre, c'est à dire ses déplacements dans le temps de son excitation, se détermine par le système d'équations (1) de vecteur d'excitation $\langle \Delta_{ip} \rangle$ donné par l'expression suivante :

$$\Delta_{ip} = \sum_{p=1}^n y_{ip} P_p. \tag{10}$$

Avec y_{ip} les déflexions de la poutre au point i dues à des charges extérieures P_3 et P_8 . Ces déflexions sont calculées de la même manière que (8) en remplaçant $R_k = 1$ par $R_k = P_3$ puis $R_k = P_8$.

La résolution du système (1) donne les forces d'interaction X_i^P dues à l'excitation extérieure ensuite, la réponse de la poutre se détermine par :

$$v_k = \frac{1 - \nu_0^2}{\pi E_0 c} \sum_{i=1}^n X_i^P F_{ik}. \tag{11}$$

La réponse de la poutre à l'instant $t = 1s$ lors de son excitation par les deux charges P_3 et P_8 , avec $P_0 = 1kN$ et $f = 200Hz$, est montrée sur la figure 6.

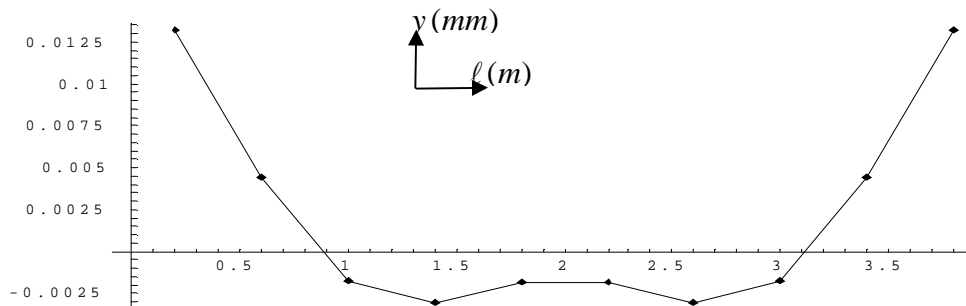


Figure 6. Réponse de la poutre à l'instant $t = 1s$.

Cas II. Deux charges harmoniques de même type excitant la poutre à deux fréquences différentes, l'une appliquée au point 2 et l'autre au point 9. Les deux charges sont exprimées par:

$$\begin{cases} P_2 = P_0 \cos(2 \times \pi \times f_1 \times t), \\ P_9 = P_0 \cos(2 \times \pi \times f_2 \times t). \end{cases} \tag{11}$$

La réponse de la poutre pour ce cas de chargement se détermine de la même manière que précédemment. Ajoutons que l'expression de la fréquence d'excitation à introduire dans la matrice du système d'équations (7) est donnée par Kiselev (1980) : $\omega = \sqrt{\sum_{j=1}^n f_j^2}$. La figure 7 montre la réponse de la poutre au point 9 au moment de son excitation avec $P_0 = 1kN$, $f_1 = 120 Hz$ et $f_2 = 240 Hz$.

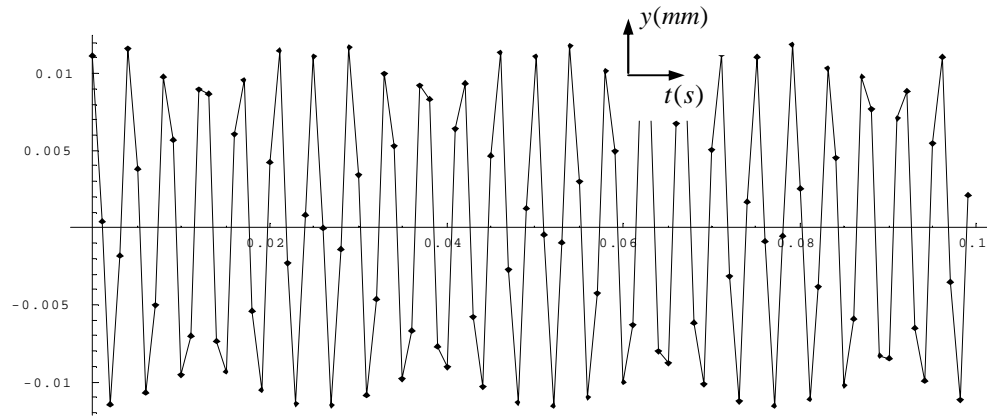


Figure 7. Réponse de la poutre au point 9.

A noter que sur la base de la connaissance des déplacements de la poutre en un point quelconque au moment de son excitation on peut déterminer les fréquences d'excitation, supposées inconnues, en utilisant la transformée de Fourier à l'aide du logiciel «MATLAB». Figure 8 illustre les deux fréquences d'excitation $f_1 = 120 Hz$ et $f_2 = 240 Hz$.

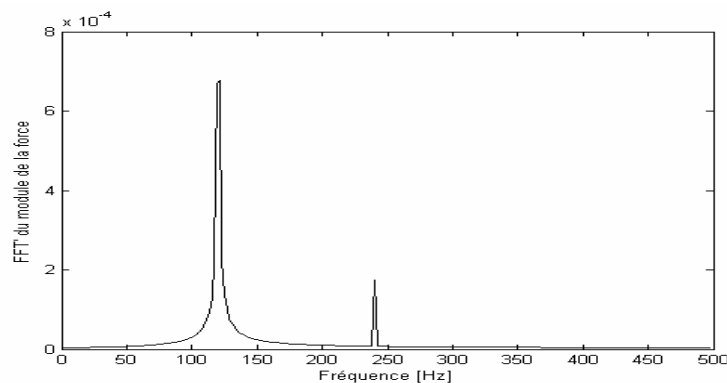


Figure 8. Réponse fréquentielle de la poutre.

4. Conclusion

L'étude apportée dans ce travail est accomplie par une approche semi analytique basant sur la méthode de Gemochkin. Cette approche permet de déterminer les fréquences et modes propres d'une poutre reposant sur semi infini élastique, ainsi que les forces de réaction dans la zone de contact dues aux excitations harmoniques extérieures. Sa réponse se détermine en appliquant les formules de la théorie d'élasticité faisant relation entre les forces de réaction d'une part avec les déplacements, les contraintes et les efforts internes d'autre part. La fonction de Green caractérisant l'interaction entre la poutre et le semi infini élastique est formulée par l'application du principe de Boussinesq, connu aussi dans la littérature sous le nom du milieu élastique de caractéristiques dictributives. Les différents résultats de calcul obtenus pour ce type de milieux sont satisfaisants.

Références

- B.N. Gemochkin, A.P. Sinitsein (1962), *Les methods pratiques du calcul des poutres de fondations et plaques reposant sur milieux élastiques*, Moscou: Stroiizdat, 240 pages.
- M.I. Gourbonov-Posadov, T.A. Malikova, V.I. Solomin (1984), *Calcul des structures reposant sur milieux élastiques*, Moscou: Stroiizdat, 699 pages.
- S. Timoshenko, S Woinovsky (1959), *Theory of plates and shells*, Moscou: Kreiger, 632 pages.
- S.V. Bosakov (2002), *Calcul statique des plaques reposant sur milieu élastique*, Minsk: BNTU, 127 pages.
- S.V. Bosakov, S. Guenfoud, N. Ouelaa, M.C. Djamaa (2005), *Dynamical analysis of a beam resting on an elastic foundation of Winkler's type*, Proceeding of the national Academy of Sciences of Belarus. 1 52-58.
- L.A. Galin (1976), *Développement de la théorie des problème de contact en U.R.S.S.*, Moscou: Nayka, 496 pages.
- V.A. Kiselev (1980), *Mécanique des structures, cours spéciaux de la dynamique et l'instabilité des ouvrages*, Moscou: Stroiizdat, 616 pages.