Rendiconti Seminario Facoltà Scienze Università Cagliari • Vol. 75, Fasc. 1-2 (2005)

Non existence de structures Kaehleriennes sur les fibres principaux en tores

ABDELKADER BOUYAKOUB(*)

Abstract. *The main result of this paper concerns principal circle bundles P with non vanishing Euler class, over odd-dimensional, closed, oriented and connected bases B. Such manifolds do not admit any Kaehler structure. We show that the same holds for principal torus bundles whose characteristic classes span a subgroup of, at least, rank one in the second integral cohomology group of the base space. This approch provides a new proof of a theorem of Benson and Gordon which asserts that no nilmanifold but the torus can be made kaehlerian. We end this note by extending this last result to certains classes of compact solvmanifolds.*

Riassunto. *Il risultato principale di questo articolo è che un fibrato principale in cerchi P con classe di Eulero non nulla, su una base B chiusa connessa e orientabile di dimensione 2n–1, non ammette alcuna struttura di Kaeler. Verifichiamo questo risultato sui fibrati principali in tori le cui classi caratteristiche generano un sottogruppo, di rango almeno uno, nel secondo gruppo di coomologia della base. Questo approccio ci permette di trovare una nuova dimostrazione del teorema di Benson e Gordon che afferma la non esistenza di strutture di Kaeler sulle nilvarietà diverse dal toro. Infine estendiamo il risultato ad alcune classi di solvarietà compatte.*

INTRODUCTION

Le but de ce travail est d'établir qu'une variété de dimension paire, fermée, connexe et orientée ne peut admettre de structure kaehlérienne dès qu'elle peut être vue comme un fibré principal en cercle $\mathbb{S}^1$ à classe d'Euler non nulle, théorème (2.1). Une première version, plus faible, de ce résultat nous a permis de montrer l'existence d'une vaste classe

(*) Abdelkader Bouyakoub, Université d'Oran Es-Sénia, Faculté des Sciences, BP 1524 El-Menawer, 31000, Oran, Algérie.
E-mail: bouyakoub@hotmail.com
Presentato il 12/07/2005.

de variétés symplectiques compactes de dimension 4 qui n'admettent aucune structure complexe [4, 5]. Nous montrons que tout fibré principal en tore $\mathbb{T}^p$ peut être considéré comme un fibré principal en cercle, non plat, dès lors que ses classes caractéristiques engendrent dans le deuxième groupe de cohomologie entière de la base un sous-groupe de rang un, au moins. Nous verrons aussi comment une nilvariété compacte peut se présenter comme un fibré principal en cercle à classe d'Euler non nulle et retrouvons le théorème de Benson et Gordon qui établit qu'une nilvariété autre que le tore ne peut être de Kaehler. Il est montré enfin que ce résultat reste vrai pour certaines classes de solvariétés fermées.

2. LE THÉORÈME PRINCIPAL

2.1. La suite exacte de Gysin

Soit $P = P(B, \mathbb{S}^1, \pi)$ un fibré principal en cercle $\mathbb{S}^1$ sur une base B orientée et avec une projection π. On lui associe naturellement une suite exacte, dite suite de Gysin, qui s'écrit:

$$\cdots \xrightarrow{\psi} H^p(B, \mathbb{R}) \xrightarrow{\pi^*} H^p(P, \mathbb{R}) \xrightarrow{\phi} H^{p-1}(B, \mathbb{R}) \xrightarrow{\psi} H^{p+1}(B, \mathbb{R}) \xrightarrow{\pi^*} \cdots$$

où $\pi^* : H^p(B, \mathbb{R}) \longrightarrow H^p(P, \mathbb{R})$ est l'homomorphisme associé à π en cohomologie, $\psi : H^p(B, \mathbb{R}) \longrightarrow H^{p+2}(B, \mathbb{R})$ est l'homomorphisme qui à tout élément α associe $\psi(\alpha) = \alpha \bullet \Omega$, et Ω est la classe d'Euler du fibré, le point • désigne le cup-produit et $\phi : H^p(P, \mathbb{R}) \longrightarrow H^{p-1}(B, \mathbb{R})$ est l'homomorphisme d'intégration le long des fibres. Une conséquence de cette suite est que les nombres de Betti $b_p(P)$ de l'espace total et ceux $b_k(B)$ de la base sont reliés par les relations:

$$b_p(P) = b_p(B) - b_{p-2}(B) + k_{p-2} + k_{p-1}$$

où k_p représente la dimension du noyau de ψ dans $H^p(B, \mathbb{R})$. Pour une étude de la suite de Gysin associée, plus généralement à un fibré en sphère, nous renvoyons à [6, 8].

Théorème 2.1. *Soit P un $\mathbb{S}^1$-fibré principal sur une base B et $\Lambda \in H^2(P, \mathbb{R})$ tel que $\Lambda^n \in H^{2n}(P, \mathbb{R})$ est non nul. Alors:*

i) $\phi(\Lambda) = \lambda \in H^1(B, \mathbb{R})$ est non nul.

Si de plus la classe d'Euler Ω est non nulle dans $H^2(B, \mathbb{R})$, alors

ii) $\pi^*(\lambda)$ est non nul dans $H^1(P, \mathbb{R})$, et

iii) $\pi^*(\lambda) \bullet \Lambda^{n-1}$ est nul dans $H^{2p-1}(P, \mathbb{R})$.

En particulier l'application: $\Theta : H^1(P, \mathbb{R}) \longrightarrow H^{2p-1}(P, \mathbb{R})$, qui à tout élément $\sigma \in H^1(P, \mathbb{R})$ associe $\Theta(\sigma) = \sigma \bullet \Lambda^{n-1}$, n'est pas un isomorphisme.

Démonstration. i) Si $\phi(\Lambda) = 0$, comme $Im(\pi^*) = Ker(\phi)$, alors $\Lambda = \pi^*(\mu)$ pour un certain μ dans $H^2(B, \mathbb{R})$, ce qui est impossible car $dim\ B = 2n - 1$ et $\Lambda^n = \pi^*(\mu^n) \neq 0$.

ii) La suite exacte de Gysin dit que:

$$0 \longrightarrow H^1(B, \mathbb{R}) \xrightarrow{\pi^*} H^1(P, \mathbb{R}) \xrightarrow{\phi} H^0(B, \mathbb{R}) \xrightarrow{\psi} H^2(B, \mathbb{R})$$

π^* est ainsi injective sur $H^1(B, \mathbb{R})$. Si de plus $\Omega \neq 0$, alors ψ est injective, car non nulle et donc π^* est un isomorphisme.

iii) Comme P est un fibré principal en cercle alors la 2-forme Λ peut s'écrire sous la forme $\Lambda = \pi^*(\lambda) \wedge \omega + \pi^*(\theta)$ où λ est donnée par i) et $d\theta = \lambda \wedge \Omega$ et ω est une forme de connexion sur P (on a bien évidemment $d\omega = \pi^*(\Omega)$). Cette expression résulte simplement du fait qu'on peut choisir pour toute classe de cohomologie dans P un représentant invariant par l'action du groupe structural $\mathbb{S}^1$, ([8]).

$$H^{2n-1}(B, \mathbb{R}) \xrightarrow{\pi^*} H^{2n-1}(P, \mathbb{R}) \xrightarrow{\phi} H^{2n-2}(B, \mathbb{R}) \longrightarrow 0$$

avec $H^{2n-2}(B, \mathbb{R}) \simeq H^1(B, \mathbb{R})$ et $H^{2n-1}(P, \mathbb{R}) \simeq H^1(P, \mathbb{R})$ d'après la dualité de Poincaré et $H^1(B, \mathbb{R}) \simeq H^1(P, \mathbb{R})$ d'après le ii).

L'application ϕ est surjective donc bijective pour des raisons de dimension. Par suite:

$$\begin{aligned} \phi\,(\pi^*(\lambda) \bullet \Lambda^{n-1}) &= \phi\,[\pi^*(\lambda \wedge \lambda \wedge \theta^{\,n-2}) \wedge \omega + \pi^*(\lambda \wedge \theta^{\,n-1})] \\ &= \phi\,[\pi^*(\lambda \wedge \theta^{\,n-1})] = 0 \end{aligned}$$

puisque B est de dimension $2n - 1$.

Si Θ était un isomorphisme alors, comme $H^1(B, \mathbb{R}) \simeq H^1(P, \mathbb{R})$, pour tout élément α il existerait un unique λ tel que $\alpha = \pi^*(\lambda)$. En particulier pour $\lambda = \phi\,(\Lambda) \neq 0$, on aurait: $\Theta\,(\pi^*(\lambda)) = \pi^*(\lambda) \bullet \Lambda^{n-1} \neq 0$, une contradiction. □

Corollaire 2.2. *Soit M une variété de dimension 2n fermée connexe et orientée qui est un $\mathbb{S}^1$-fibré principal à classe d'Euler non nulle sur une base B. Alors M n'admet aucune structure kaehlérienne.*

Démonstration. Elle se déduit immédiatement du théorème (2.1) et du:

Lemme de Lefschetz [15]: *Soit K une variété kaehlérienne compacte de dimension réelle 2n. Si Γ désigne la classe de sa forme de Kaehler, alors pour tout entier p, $0 \leq p \leq n$, les endomorphismes $\Theta_p = H^p(K, \mathbb{R}) \longrightarrow H^{2n-p}(K, \mathbb{R})$ définis par $\Theta_p(\beta) = \beta \cdot \Gamma^{n-p}$, sont des isomorphismes.* □

Corollaire 2.3. *Toute action libre du cercle $\mathbb{S}^1$ sur une variété kaehlérienne compacte en fait un fibré principal en cercle qui est nécessairement à courbure nulle.*

Corollaire 2.4. *Soit $P(B,\mathbb{T}^p, \pi)$ un fibré principal en tore $\mathbb{T}^p$ sur une base B fermée connexe et orientée. Supposons $P(B,\mathbb{T}^p, \pi)$ de dimension paire et que sa classe caractéristique $\Omega \in H^2(B, \mathbb{Z}^p) \subseteq H^2(B, \mathbb{R}^p)$ n'est pas nulle. Alors ce fibré ne peut admettre de structure kaelérienne.*

En effet, soit $\Omega = (\Omega_1, \Omega_2, ..., \Omega_p) \in H^2(B, \mathbb{Z}^p)$ la classe de $P(B, \mathbb{T}^p, \pi)$. Alors, à une transformation de $SL_p(\mathbb{Z})$ près, on peut toujours se ramener à $\Omega = (\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_k, 0, \ldots, 0)$ où $k \leq p$ et les $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_k$ sont indépendantes sur $\mathbb{R}$. Posons $B_1 = P/\mathbb{S}^1$ où $\mathbb{S}^1$ est le cercle correspondant à l'action du champ fondamental X_1 dual d'une forme de connexion ω_1 telle que $d\omega_1 = \pi^*(\gamma_1)$ où γ_1 est un représentant de Ω_1, [5, 8]. Dans ces conditions $P \longrightarrow B_1$ est un $\mathbb{S}^1$-fibré principal à classe d'Euler Ω_1 non nulle.

Le corollaire (2.4) généralise le corollaire 2.12 de [2], où est étudié le cas où la base B du fibré est elle même un tore. Cela résulte de ce que toute nilvariété compacte associée à un groupe de Lie 2-nilpotent est en fait un fibré principal en tore sur un tore.

Corollaire 2.5. *Soit $W = M \times N$ une variété compacte de dimension paire dont l'un des facteurs est une $\mathbb{S}^1$-fibration principale à classe d'Euler non nulle. Alors W n'admet aucune structure de Kaehler.*

3. LES NILVARIÉTÉS

Une nilvariété M est le quotient d'un groupe de Lie (connexe et simplement connexe) nilpotent G par un sous-groupe discret cocompact D. Il s'en suit, en particulier, que D est de présentation finie, sans torsion et nilpotent. L'existence d'un tel sous-groupe discret uniforme dans G suppose que son algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est rationnelle, à savoir qu'elle admet une base par rapport à laquelle toutes les constantes de structure sont rationnelles, [10]. Dans ce qui suit nous ferons, dans un premier temps, l'hypothèse que le groupe de Lie G n'admet pas de facteur abélien.

Un groupe de Lie nilpotent connexe et simplement connexe G est différentiablement un espace euclidien $\mathbb{R}^n$. La variété $M = G/D$ est alors un $K(D, 1)$ où $D = \pi_1(M)$ est le groupe fondamental de M. D'un point de vue algébrique, on peut affiner la série centrale supérieure (la Matriochka centrale) de D de sorte que toutes ses sections soient infinies cycliques, [9]

$$D = D_1 \supseteq D_2 \cdots \supseteq D_{n-1} \supseteq D_n \supseteq 1$$

avec $D_i/D_{i+1} \simeq \mathbb{Z}$. Remarquons que $D_n \simeq \mathbb{Z} \subseteq Z(D)$, le centre non trivial du groupe D.

Rappelons [10], qu'étant donné un groupe D nilpotent, de présentation finie et sans torsion, alors D est sous-groupe d'un groupe de Lie simplement connexe nilpotent D_R et $M = D_R/D$ est une nilvariété. Inversement, si $M = G/D$ est une nilvariété, alors les groupes G et D_R sont isomorphes commes groupes de Lie et M est difféomorpohe à D_R/D.

3.1. La fibration en cercle

Considérons à présent l'extension centrale (donc abélienne) suivante:

$$1 \longrightarrow D_n \longrightarrow D \longrightarrow D' \longrightarrow 1$$

Il est clair que $D' \simeq D_n/D$ est aussi un groupe nilpotent de présentation finie et sans torsion. En effet D_n est normal dans D. Le cocycle de cette extension est l'homomorphisme

$$[\tau] : D' \times D' \longrightarrow \mathbb{Z}.$$

Ce cocycle $[\tau]$ est élément de l'espace de cohomologie entière $H^2(D', \mathbb{Z})$ du groupe D', [14]. L'extension étant centrale, $[\tau]$ ne peut être un élément de torsion. Si on identifie le groupe de cohomologie $H^2(D'_R/D', \mathbb{Z})$ à $H^2(D', \mathbb{Z})$ et si l'on se rappelle les identifications usuelles entre les groupes de cohomologie avec les classes d'homotopie dans les $K(\mathbb{Z}, p)$, [13].

$$H^2(D', \mathbb{Z}) \simeq H^2(K(D', \mathbb{Z}), \mathbb{Z}) \simeq [K(D',1), K(\mathbb{Z}, 2)],$$

on voit que le cocycle $[\tau] : D'_R/D' \longrightarrow K(\mathbb{Z}, 2)$ définit une fibration principale, non plate, en cercle $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ de la nilvariété $M = D_R/D = G/D$ sur la nilvariété $M' = D'_R/D'$. En effet $K(\mathbb{Z}, 2) = CP(\infty)$ n'est autre que l'espace classifiant des fibrés principaux en cercle. La fibre de cette fibration est un élément du commutateur $[D, D]$ du groupe fondamental D de la nilvariété puisque $D_n \subset [D, D]$. Elle correspond donc à un élément du noyau de l'homomorphisme d'Hurwitz et est par conséquent $\mathbb{Z}$-homologue à zéro. D'après Chern-Spanier ([6], page 252), cette hypothèse implique que $k_0 = 0$ et que $\Omega \neq 0$ et $q\Omega \neq 0$ pour tout entier q, c'est dire que Ω n'est pas un élément de torsion. Nous avons ainsi exposé tous les arguments pour le:

Théorème 3.1. *Aucune nilvariété (de dimension paire) autre que le tore ne peut admettre de structure kaehlérienne.*

Ce théorème déjà établi, moyennant une approche différente, par Benson et Gordon dans [2], avait en réalité été prouvé, mais non publié, longtemps auparavant par Koszul, [3].

Remarque 3.2:

1) Dans le cas où le groupe de Lie nilpotent rationnel G admet un facteur abélien, alors toute nilvariété associée est un produit direct d'une nilvariété compacte sur le facteur non abélien par un tore, [10] et le théorème (3.1) reste valable au vu du corollaire (2.5).

2) Un regard attentif à la preuve du théorème (3.1), montre qu'il n'est pas nécessaire que le sous-groupe, isomorphe à $\mathbb{Z}$, qui intervient dans l'extension mise en évidence dans (3.1) soit centrale pour que la nilvariété soit vue comme un fibré principal en cercle à classe d'Euler non nulle. Il suffit en effet que ce sous-groupe soit abélien et normal contenu dans le commutateur $[D, D]$.

4. CERTAINES SOLVARIÉTÉS

Une solvariété est un espace $M = G/H$ où G est un groupe de Lie connexe résoluble et H un sous-groupe fermé. La classe des solvariétés est beaucoup plus large que celle des nilvariétés et leur étude s'est révélée autrement plus ardue, [1, 11]. L. Auslander a démontré que toute solvariété est difféomorphe à l'espace total d'un fibré vectoriel sur une solvariété compacte. Ceci a dégagé l'importance des solvariétés compactes. Mostow à montré que toute solvariété compacte est en fait un fibré dont la base est un tore et la fibre une nilvariété. Elle est de ce fait un fibré en cercle pour lequel il s'est avéré difficile de donner un résultat général sur sa classe d'Euler. Une solvariété est asphérique ($\pi_i(M) = 0$ pour $i \geq 2$) et donc déterminée par son groupe fondamental, de génération finie, à difféomorphisme près. Ainsi si $\pi_1(M)$ est nilpotent, M est une solvariété.

L'approche que nous avons proposée pour les nilvariétés ne peut être directement étendue à toute les solvariétés. Une première raison est qu'une solvariété compacte n'est pas nécessairement le quotient d'un groupe de Lie résoluble connexe et simplement connexe (unimodulaire) par un sous-groupe discret cocompact comme cela est le cas pour les nilvariétés, [1, 12]. Néanmoins toute solvariété compacte $M = G/H$ admet un revêtement fini par une autre solvariété $M' = G'/\Gamma$ où Γ est un sous-groupe discret cocompact dans un groupe de Lie résoluble simplement connexe G'. Une seconde raison est que même pour un tel revêtement, le groupe G' n'a pas nécessairement un centre non trivial et même lorsqu'il en admet un, ce centre peut très bien avoir une intersection triviale avec le commutateur du groupe. C'est justement le cas de toutes les solvariétés que l'on pourrait construire à partir de groupes totalement résolubles unimodulaires susceptibles d'admettre des structures kaehlériennes. Dans [3] est donné, en particulier, au moins un exemple d'une solvariété compacte totalement résoluble cohomologiquement kaehlérienne mais non kaehlérienne. On peut donc remarquer que de telles solvariétés ne peuvent admettre aucune action libre du cercle à classe d'Euler non nulle. Or notre approche s'appui précisement sur une obstruction cohomologique à la kaehlérianité, ce qui limite de ce point de vue sa portée. Toutes ces remarques nous forcent à imposer des hypothèses supplémentaires sur les solvariétés à considérer.

Théorème 4.1. *Soit $M = G/\Gamma$ une solvariété, où G est un groupe de Lie résoluble connexe et simplement connexe et Γ un sous-groupe discret cocompact. Alors M ne peut être kaehlérienne dans les cas suivants:*

i) *Le commutateur* $[\Gamma , \Gamma]$ *contient un sous-groupe H isomorphe à $\mathbb{Z}$ et normal dans* Γ.

ii) *L'intersection* $Z(\Gamma) \cap [\Gamma, \Gamma]$ *du centre de* Γ *avec son commutateur est non triviale*.
iii) *Le dernier terme non trivial de la suite dérivée de* Γ *est infini cyclique.*

Démonstration

i) A l'extension abélienne $1 \longrightarrow H \longrightarrow \Gamma \longrightarrow \Gamma' = \Gamma/H \longrightarrow 1$, on associe le cocycle $[\tau] : \Gamma' \times \Gamma' \longrightarrow \mathbb{Z}$ élément de $H^2(\Gamma', \mathbb{Z})$. Soit M' une variété différentiable $K(\Gamma', 1)$ associée au groupe résoluble Γ' c'est une solvariété compacte d'après Gorbatsevich [7]. La fibration est principale pour les raisons évoquées dans le cas des nilvariétés et non plate puisque H est contenu dans $[\Gamma, \Gamma]$.

ii) Dans ce cas $Z(\Gamma) \cap [\Gamma, \Gamma]$ contient nécessairement un sous-groupe isomorphe à $\mathbb{Z}$ qui est normal puisque central.

iii) Soit $\Gamma^{(k)}$ ce sous-groupe. Il est abélien et normal puisque tous les sous-groupes dérivés sont caractéristiques. □

REFERENCES

[1] L. Auslander, *An exposition of the structure of solvmanifolds*, Part I, Algebraic theory. B.A.M.S. Vol 19, n° 2 (1973), 227-261.

[2] C. Benson, C.S. Gordon, *Kaehler and symplectic structures on nilmanifolds*, Topology 27, n° 4 (1988), 513-518.

[3] C. Benson, C.S. Gordon, *Kaehler structures on compact solvmanifolds*, Proc. Amer. Math. Soc. 108; n° 4 (1990), 971-980.

[4] A. Bouyakoub, *Sur les fibrés principaux de dimension 4, en tores, munis de structures symplectiques invariantes et leurs structures complexes*, C.R. Acad. Sci. Paris, t 306, Série I, (1988), 417-420.

[5] A. Bouyakoub, *Sur une classe de variétés symplectiques et leurs structures presque complexes*, Thèse de Doctorat de Mathématiques de l'Université de Haute Alsace, Juin 1987.

[6] S.S. Chern et E.H. Spanier, *The homology structures of fiber bundles*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 36 (1950), 248-255.

[7] V.V. Gorbatsevich, *On Lie groups acting transitively on compact solvmanifolds*. Uzv. Akad. Nauk. SSSR. Ser. Mat. 41, n° 2, 285-307. English Transl., Math. USSR-Izv. 11, 271-292.

[8] W. Greub, S. Halperin et R. Van-Stone, *Connections, curvature and cohomology*, Vol. I, II. Acad. Press. (1972).

[9] L. Lambe et S. Priddy, *Cohomology of nilmanifolds and torsionfree nilpotent groups*. Trans. Math. Soc. 273, (1982), 39-55.

[10] A. Malcev, On a class of homogeneous spaces, Izv. Akad. Nauk. SSSR. Ser. Mat. 13 (1949), 9-32. English Transl. Math. USSR-Izv. 39 (1949).

[11] G.D. Mostow, *Factor spaces of solvable groups*. Ann. of Math. (2) 60, (1954), 1-27.

[12] M.S. Raghunathan, *Discrete subgroups of Lie groups*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg and New-York, (1972).

[13] N. Steenrod, *Topology of fibre bundles*. Princeton, 1951.

[14] E. Weiss, *Cohomology of groups*. Acad. Press. (1969).

[15] R.O. Wells, *Differential analysis on complex manifolds*, Grad. Texts in Math. 65 Springer-Verlag (1979).