

Application et adaptation de la triangulation de Delaunay pour la reconstruction de surfaces.

Surface reconstruction using and adapting Delaunay triangulation.

M.O. Challali, I. Belaidi, K. Mohammedi, A. Belaidi

Groupe transfert de technologie, LMMC, Université Boumerdes, Algérie, mchallali@yahoo.fr

Guy Ishiomin

LMSP, ENSAM, CER de Paris, 151 Bd de l'Hôpital 75013.

Résumé

La reconstruction intéresse plusieurs domaines d'application et de recherche. Parmi ceux-ci nous trouvons: la génération d'un modèle CAO, la simulation, l'inspection et le contrôle, l'usinage, technologie des prothèses, assistance au diagnostic médical, vision robotique et artificielle, reconnaissance de terrains,...etc. Parmi les techniques de reconstruction d'une surface, nous trouvons celle qui procède par polyèdrisation du nuage de points [Ver 98], [Var 97]. Dans ce papier, nous proposons une telle technique basée sur l'adaptation et l'utilisation de la triangulation de Delaunay en dimension 2D1/2.

Mots-clés : Reconstruction de surface ; triangulation ; maillage ; polyèdre de Delaunay

Abstract

Surface reconstruction interests several research an applicability. Among those we find : CAD model generation, simulation, inspection and control, machining, prosthesis technology, medical diagnosis assistance, robot and artificial vision, terrain recognition,...etc. Among the surface reconstruction techniques, there is which proceed with cloud data polyerdrisation . In this paper, we propose a technique based on the adaptation and the use of the Delaunay triangulation in 2D1/2 space.

Keywords : Surface reconstruction ; triangulation ; mesh ; Delaunay polyèdrisation.

1. Introduction

En reconstruction d'objets 3 D à partir d'un nuage de points numérisés, l'implémentation de l'algorithme de triangulation de Delaunay [Del'34] dans sa version « naïf » prend en considération tout triangle ne violant pas le critère de la sphère vide, y compris ceux qui ne représentent pas nécessairement la surface à reconstruire, ce qui conduit généralement à une restitution incorrecte de la surface. Pour améliorer la qualité de triangulation, nous introduisons deux critères complémentaires de triangulation: la sphère circonscrite maximale admissible, pour exclure les grands triangles même s'ils sont de bonne qualité, et la qualité imposée aux triangles, pour exclure les petits triangles de mauvaise qualité. Nous nous intéresserons à cet effet à la construction du polyèdre de Delaunay de dimension 2D1/2, ou triangulations planaires pour des objets plongés dans un espace de dimension 3D se situant de façon mitoyenne entre les dimensions 2D et 3D.

L'algorithme « naïf » de la triangulation de Delaunay d'un nuage de points en 3 dimensions [Cha'03], [Bel 03b] conduit généralement à une restitution incorrecte

de la surface, du fait que tout triangle ne violant pas le critère de la sphère vide, y compris ceux qui ne représentent pas nécessairement la surface à reconstruire, sont pris en considération, ceci constitue l'objet de la première partie de ce papier. Pour améliorer la qualité de triangulation, nous introduisons dans la première partie de ce papier deux critères complémentaires de triangulation: la sphère circonscrite maximale admissible, pour exclure les grands triangles même s'ils sont de bonne qualité, et la qualité imposée aux triangles, pour exclure les petits triangles de mauvaise qualité. Nous nous intéresserons à cet effet à la construction du polyèdre de Delaunay de dimension 2D1/2, ou triangulations planaires pour des objets plongés dans un espace de dimension 3. Une discussion sur les résultats obtenus dans l'application mise en œuvre, basée sur ces critères [Cha'03], clôture cet article.

2. Problématique : algorithme de Delaunay appliqué à la reconstruction

Les résultats de reconstruction de surfaces, obtenus à partir de l'implémentation « naïve » de la triangulation de Delaunay [Del 34], [Cha'03] sont

généralement insuffisants. La figure 1 montre la justesse de l'algorithme naïf appliqué à un nuage de point dans le plan, alors que dans les figure 2 et 3, nous constatons plutôt une restitution incorrecte de la surface. En effet, l'algorithme ainsi implémenté, prend en considération tout triangle ne violant pas le critère de la sphère vide. Or, il peut arriver qu'un triangle soit de Delaunay mais ne représentant pas réellement la surface à reconstruire. De tels triangles sont nettement visibles sur la figure 3. Ces triangles sont généralement présents aux endroits à fortes courbures (figure 2), particulièrement à des endroits sous-scannés, et aux endroits où les surfaces en vis-à-vis sont très proches (figure 3).

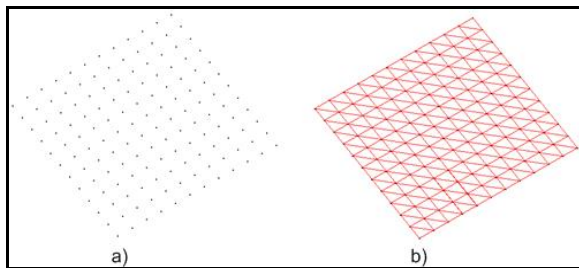


Fig. 1 Justesse de l'algorithme naïf

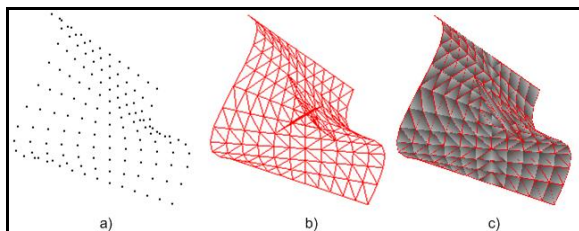


Fig. 2 Algorithme naïf, apparition de triangles parasites

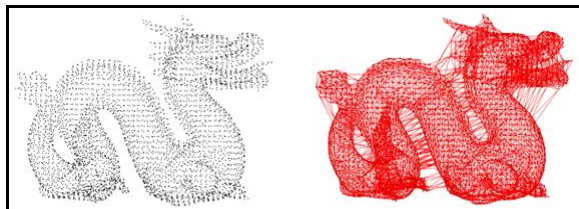


Fig.3 Triangulation incorrecte inhérente à l'application de l'algorithme naïf

3. Construction du polyèdre de Delaunay

La triangulation de Delaunay se fait généralement dans un espace à deux ou à trois dimensions [For'92], [Bou'95], [ig'98]. Le terme triangulation de Delaunay s'utilise aussi bien pour désigner une triangulation d'un ensemble de points dans un espace 2D, ou pour désigner une tétraédrisation d'un ensemble de points dans l'espace 3D [Pau'97]. La construction du polyèdre de Delaunay à laquelle nous nous intéressons, se situe de façon mitoyenne entre les deux cas : triangulations dans le plan 2D et dans l'espace 3D. Il s'agira de triangulations planaires pour des objets plongés dans un espace de dimension 3, que nous désignons par triangulations 2D1/2 dans l'espace [Des'96].

3.1 Triangulation dans le plan

Dans le plan, tous les triangles formant le polyèdre sont coplanaires. Dès lors, le critère du cercle vide remplace celui de la sphère vide, et trois points suffisent à la détermination complète du centre du cercle circonscrit et de son rayon. C'est la situation qui présente le moins de difficultés étant donné que le traitement géométrique, dans ce cas de figure, est le moins lourd que dans les autres cas. Calculer le centre du cercle et son rayon peut se faire essentiellement soit en utilisant l'équation du cercle, soit en calculant le point d'intersection de deux médiatrices du triangle [cha 03a], [bel 03a].

La deuxième manière de connaître complètement le cercle circonscrit au triangle est d'utiliser la propriété de ces médiatrices. Comme le point d'intersection des médiatrices d'un triangle est le lieu géométrique du centre de son cercle circonscrit, il suffit donc de connaître l'intersection de deux d'entre elles. Le problème se ramène alors à la détermination de deux segments de droite dans le plan. Cette façon de faire, tout comme la précédente, aboutie aussi à la résolution d'un système d'équations linéaires.

3.2 Triangulation dans l'espace 3D

La triangulation au sens de Delaunay d'un nuage de points 3D est, d'une manière classique, une tétraédrisation de l'ensemble de ces points. Dans ce cas, le nuage de points définit la surface d'un objet ainsi que son intérieur. Il est alors question de maillage volumique dont l'intérêt est évident dans la résolution de divers problèmes par la méthode des éléments finis. On cherche alors à construire un tétraèdre avec 4 points qui donnent une sphère vide afin d'obéir au critère fondamental de Delaunay. Le critère du cercle vide du cas 2D, est ici remplacé par celui de la sphère vide. Le terme de boule est parfois préféré à celui de sphère selon les auteurs.

3.3 Triangulation dans l'espace 2D-1/2

Le cas des triangulations 2D-1/2 est légèrement différent des deux cas précédents. En effet, le critère du cercle vide ne suffit plus car nous traitons d'objet dans un espace de dimension 3. La sphère déterminée avec 4 points n'est non plus envisageable dans la mesure où, la reconstruction de la surface de l'objet considéré se fait avec des triangles. Afin de parfaire à cette insuffisance dans le but de représenter un objet tridimensionnel avec des facettes triangulaire, nous avons combiné les deux critères de Delaunay. Nous empruntons la sphère du 3D et le triangle du 2D, ce qui conduit à assujettir un triangle à une sphère (figure 4).

Afin de définir totalement la sphère et pour qu'elle soit de la plus petite taille possible, celle-ci doit contenir le triangle qui lui est circonscrit dans un de ces plans diamétraux. Les points P_i respectent l'équation du cercle et $(\vec{a} \otimes \vec{b}) \cdot \vec{d}$ est un produit

mixte nul. La résolution du système d'équation résultant permet de déterminer le centre et le rayon de la sphère.

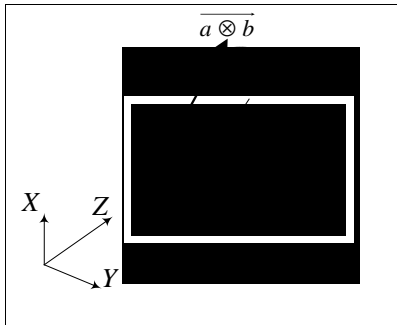


Fig 4 Triangle diamétral et sphère circonscrite

4. L'algorithme de triangulation

L'implémentation de manière naïve de la triangulation de Delaunay pour reconstruire une surface dans [Cha 03a], a montré que celle-ci n'aboutit généralement pas à un résultat correct. La figure 1 montre la justesse de l'algorithme naïf appliqué à un nuage de point dans le plan, alors que la figure 2 et 3 montrent plutôt l'inverse.

La triangulation mise en place est menée par un processus d'insertion d'arêtes. Un premier triangle est d'abord construit, c'est le triangle à partir duquel il y aura croissance de la triangulation. L'algorithme est du type à construction incrémentale. La croissance de la triangulation débute avec trois arêtes dans la liste des arêtes. Pour chaque arête, nous recherchons le point avec lequel elle forme un triangle valide. Les nouvelles arêtes (qui n'existent pas déjà dans la liste) sont rajoutées à la fin de cette liste. Ceci fait que pendant tout le processus de triangulation, la liste des arêtes est parcourue depuis son début jusqu'à sa fin tout en y rajoutant les nouvelles arêtes induites par les points non encore triangulés. Le processus s'arrête dès lors qu'il n'y a plus possibilité d'ajouter de nouvelles arêtes. Notons qu'en parallèle, une liste de triangles est créée.

Pour construire le polyèdre, nous avons utilisé et adapté la triangulation de Delaunay à la reconstruction [Cha'03], [Cha 03b], car celle-ci étant classiquement réservée à la triangulation des points dans le plan ou à la tétraédrisation de points dans l'espace. Le pseudo-code de la procédure triangulation implémentée est donné en figure 5.

```

1- ListePoints ← fichier de points (2D ou 3D)
2- Trouver les  $m_1$  points voisins du premier point de ListePoints
3-   Faire pour  $i = 1 \rightarrow m_1 - 2$ 
4-     Faire pour  $j = i \rightarrow m_1 - 1$ 
5-       Faire pour  $k = j \rightarrow m_1$ 
6-         Considérer le triangle  $\Delta(P_i, P_j, P_k)$ 
7-         Déterminer la sphère du triangle  $\Delta$ 
           (par Gauss avec pivotation totale)
8-   Si  $\left\{ \begin{array}{l} \text{rayon sphère} \leq \text{RayonLimite} \\ \text{et Sphère vide} \end{array} \right\}$  Ajouter le triangle  $\Delta$  à ListeTrianglesTemp
9-     Fin pour  $k$ 
10-    Fin pour  $j$ 
11-   Fin pour  $i$ 

12- Sélectionner le triangle optimal TriangleOpt
    de ListeTrianglesTemp
13- ListeTriangles ← TriangleOptimal
14- ListeArêtes ← arêtes de TriangleOptimal
15- ListeTrianglesTemp =  $\emptyset$ 

16- ListeTriangles ← Triangle initial
17- ListeArêtes ← Arêtes initiales
18- Début ListeArêtes
19- Faire jusqu'à fin ListeArêtes
20-   Pour chaque arête ( $A_i$   $i = 1, \dots, n$ ) de ListeArêtes
21-     ListeTrianglesTemp =  $\emptyset$ 
22-     Trouver le voisinage  $P$  de l'arête  $A_i$ 
23-     Faire pour chaque point  $P_j$  ( $j = 1, \dots, m$ ) de  $P$ :
24-       Considérer le triangle ( $A_i, P_j$ )
25-       Déterminer la sphère du triangle ( $A_i, P_j$ )
26-       Si rayon sphère  $\leq$  RayonLimite
27-         Si  $\left\{ \begin{array}{l} \text{sphère vide ajouter le triangle } (A_i, P_j) \text{ à ListeTrianglesTemp} \\ \text{points cosphériques} \rightarrow \text{Gestion des points cosphériques} \end{array} \right.$ 
28-       Fin Faire
29-     Supprimer de ListeTrianglesTemp les triangles existant dans ListeTriangles
30-     Sélectionner le triangle optimal TriangleOpt de ListeTrianglesTemp
31-     ListeTriangles ← TriangleOptimal
32-     ListeArêtes ← arêtes nouvelles (non existantes dans la liste)
33-   Fin faire
34- ListeTrianglesTemp =  $\emptyset$ 

```

Fig 5 Algorithme implémenté

La recherche du point à associer à une arête afin de former un éventuel triangle (figure 6), se fait dans le voisinage de celle-ci. La triangulation de Delaunay étant par définition une triangulation de voisinage, il n'est donc généralement pas utile de tester l'ensemble du nuage de points. Ainsi, un gain de temps de calcul très appréciable est réalisé surtout quand les fichiers de points sont importants.

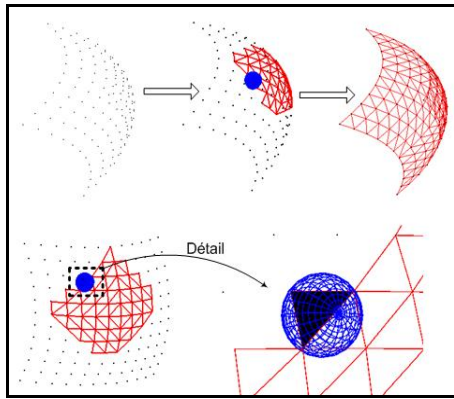


Fig 5 Croissance de la triangulation

5. Résultats

Les critères complémentaires de triangulations introduits dans [chal'03a], [Bel'03a], modifiant l'algorithme naïf, à savoir la *sphère circonscrite maximale admissible* et la *qualité imposée aux triangles* ont permis d'améliorer sensiblement la qualité de triangulation.

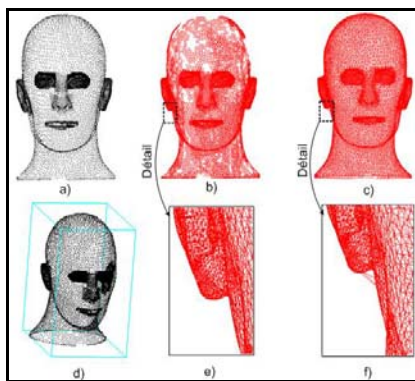


Fig 6 Influence de la sphère limite

Les deux critères introduits sont complémentaires :

- l'un interdit les grands triangles même si ceux-ci sont de bonne qualité car les nuages de points sont suffisamment denses pour que les triangles résultant soit de petites taille.
- l'autre interdit les petits triangles quand ceux-ci sont de mauvaise qualité. L'importance de ce critère est faible par rapport au premier quand la densité de numérisation est uniforme et compacte.

La figure 6 montre un même objet triangulé avec deux différentes valeurs de la sphère maximale. La figure 6b montre une triangulation imparfaite présentant des

lacunes de triangulation, celle-ci étant faite avec un facteur sphère de 80. Ces lacunes comportent des points (non représentés) non triangulés, car les dimensions des sphères qu'ils induisent sont supérieures à la dimension non triangulés, car les dimensions des sphères qu'ils induisent sont

supérieures à la dimension de la sphère maximale. La figure 6c montre une triangulation correcte avec un facteur de 15, ainsi que les triangles à filtrer, visibles dans le détail correspondant 6f) alors que ceux-ci sont absents dans le détail 6e). La figure 6d) montre le nuage de points avec sa boîte englobante.

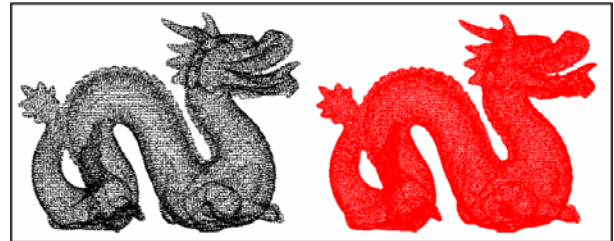


Fig 7 Effet des deux critères sur la triangulation

La figure 7 montre le même objet que celui de la figure 3. L'influence des deux critères de triangulation sur la qualité de celle-ci est nettement visible. En effet, les triangles parasites indésirables ont été éliminés grâce au fait que les triangles dont la sphère circonscrite est supérieure à celle imposée ne sont pas autorisés à participer à la reconstruction de la surface.

6. Conclusion

Pour construire le polyèdre, nous avons utilisé et adapté la triangulation de Delaunay à la reconstruction [Cha'03], [Cha 03b], car celle-ci étant classiquement réservée à la triangulation d'objets plans ou à la tétraédrisation d'objets 3D, utilisée potentiellement pour le maillage d'objets quelconques en analyse par la méthodes des éléments finis.

La reconstruction d'objets ou de surfaces par triangulation est un problème de dimension $2D - 1/2$, l'application de la triangulation de Delaunay en respectant uniquement son lemme fondamental ne donne généralement pas de bons résultats. Nous avons introduits des critères de triangulations afin d'interdire certains triangles qui ne sont pas représentatifs de l'objet. Malgré l'amélioration de la qualité de triangulation constatée ces critères, d'autres triangles indésirables peuvent apparaître, ceux-ci nous ont amenés à mettre en place deux filtres de première et deuxième espèce afin d'aboutir à une triangulation valide et exploitable. A ces difficultés s'ajoute celle posée par la détection et la gestion des points cosphériques qui peuvent en effet apparaître quelques soit la complexité de l'objet à trianguler, alors que le filtrage devient compliqué lorsqu'il s'agit d'objets complexes et mal numérisés [Cha'03], [Cha 03b].

7. Références bibliographiques

[Bel 03a] I. Belaidi, M.O. Challali, K. Mohammedi, Guy Ishiomin. Criterions to perform Delaunay triangulation algorithm, (soumis à publication).

[Bel 03ab] I. Belaidi, M.O. Challali, K. Mohammedi, Guy Ishiomin. Algorithmique pour la construction de la triangulation de Delaunay, (soumis à publication).

[Bou 95] H. Bourouchaki, S.H.Lo. Fast Delaunay triangulation in three dimensions. *Comput. Methods Appl. Mesh. Engrg.* 128 (1995) pp:153-167.

[Cha 03] M.O. Chalali. Reconstruction d'objets discrets 3 D. Application de la triangulation de Delaunay. Mémoire de Magister ; Université M'hamed Bougara Boumer des (Algérie), 2003.

[Cha 03a] M.O. Challali, I. Belaidi, K. Mohammedi, A. Belaidi, Guy Ishiomin. Reconstruction d'objets discrets 3 D. Démarche globale et triangulation de Delaunay. Journées de Mécanique JM'2004 ; Ecole Mmilitaire Polytechnique, Bordj El Bahri (Algérie)

[Cha 03b] M.O. Challali, I. Belaidi, K. Mohammedi, A. Belaidi, Guy Ishiomin. Triangulation de Delaunay contrainte : une approche pour la reconstruction d'objets complexes, (soumis à publication).

[Cig 98] Cignoni P, Montani C, Scopigno R. A fast divide and conquer Delaunay triangulation algorithm. *Computer Aided Design* 1998; 30(5): 33-341.

[Del 34] B. Delaunay. Sur la shére vide. *Bulletin de l'académie des sciences de l'URSS, Classe des sciences mathématiques et naturelles*, 1934, pp:793-800.

[Des 96] P. Desnoguès. Triangulations et quadriques. Thèse de doctorat, INRIA Sophia Antipolis, Valbonne, France, Décembre 1993.

[For 92] S.J. Fortune. Voronoï diagrams and Delaunay triangulations.

[Pau 97] P.L.George, H. Bourouchaki. Triangulation de Delaunay et maillage, application aux éléments finis.